Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:
• volume 1 — conjuntos, funções
• volume 2 — logaritmos
• volume 3 — trigonometria
• volume 4 — seqüências, matrizes, determinantes, sistemas
• volume 5 — combinatória, probabilidade
• volume 6 — complexos, polinômios, equações
• volume 7 — geometria analítica
• volume 8 — limites, derivadas, noções de integral
• volume 9 — geometria analítica
• volume 10 — geometria espacial
• volume 11 — matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva
A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.
Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de testes de vestibulares, acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.
Na presente edição, a seção de testes de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.
ATUAL EDITORA
Fundamentos de Matemática Elementar
David Degenszajn
11
Fundamentos de Matemática Elementar
Gelson Iezzi
Samuel Hazzan
David Degenszajn
a comercial
a financeira
descritiva
Autor: Iezzi, Gelson
Título: Fundamentos de matemática elemen
A

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN
DAVID MAURO DEGENSZAJN

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 11

Matemática Comercial
Matemática Financeira
Estatística Descritiva

418 exercícios propostos com resposta
215 testes de vestibulares com resposta

1ª edição

Sumário

CAPÍTULO I

Matemática Comercial

I. Razões e proporções

1. *Razão*

Suponhamos que num determinado ano (denominado ano 1), as vendas de uma empresa tenham sido de 300 mil reais e que as do ano seguinte (chamado de ano 2) sejam de 450 mil reais. Poderíamos comparar esses dois valores dizendo que sua diferença é de 150 mil reais. No entanto, a diferença não nos oferece uma idéia relativa do crescimento das vendas.

Outra forma de efetuarmos a comparação poderia ser dividindo as vendas do ano 2 pelas vendas do ano 1, isto é, calculando 450 : 300 que é igual a 1,5. Assim, dizemos que as vendas do ano 2 são uma vez e meia maiores que as do ano 1. Essa última forma de comparação é chamada de *razão*.

Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, chamamos de *razão de a para b*, ou simplesmente *razão entre a e b*, nessa ordem, ao quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado por a : b.

O número a é chamado de *antecedente*, e b é denominado *conseqüente*. Quando a e b forem medidas de uma mesma grandeza, elas devem ser expressas na mesma unidade de medida.

2. Proporção

Ainda com relação à mesma empresa, suponhamos que as vendas do ano 3 sejam de 600 mil reais e as do ano 4, 900 mil reais. Dessa forma, a razão das vendas do ano 4 para as vendas do ano 3 é 900 : 600 que é igual a 1,5 e, portanto, essa razão equivale à razão 450 : 300, que pode ser representada como mostrado a seguir:

$$\frac{450}{300} = \frac{900}{600}$$

Essa igualdade de duas razões é chamada de *proporção*. Ela pode ser lida da seguinte forma: "450 está para 300 assim como 900 está para 600".

Dadas as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, à sentença de igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ chamamos de *proporção*. Os valores *a* e *d* são denominados *extremos*, e *b* e *c* são chamados de *meios*.

3. Propriedade

Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com *b* e *d* diferentes de zero. Vale a seguinte propriedade:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a \cdot d = b \cdot c$; isto é, *em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios*. Resumidamente, tal propriedade pode ser expressa dizendo-se que, em toda proporção, os produtos cruzados são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Nessa proporção, os produtos cruzados são $a \cdot d$ e $b \cdot c$ e $ad = bc$.

A justificativa dessa propriedade pode ser feita tomando-se a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e multiplicando-se membro a membro por $b \cdot d$. Assim, teremos:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d}$$

E, portanto:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplos

1º) Um investidor aplicou 20 mil reais sendo 8 mil reais numa caderneta de poupança e 12 mil reais em ações. Calcule a razão entre:

a) o valor aplicado em ações e o valor total investido.

b) o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido.

c) o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança.

Resolvendo, temos:

a) A razão entre o valor aplicado em ações e o valor total investido foi:

$$\frac{12\,000}{20\,000} = \frac{3}{5}$$

b) A razão entre o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido foi:

$$\frac{8\,000}{20\,000} = \frac{2}{5}$$

c) A razão entre o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança foi:

$$\frac{12\,000}{8\,000} = \frac{3}{2}$$

2º) Um atleta *A* faz um determinado percurso em 52 minutos, ao passo que um atleta *B* faz o mesmo percurso em 1 hora e 8 minutos. Qual a razão entre os tempos gastos pelos atletas *A* e *B*?

A razão entre os tempos gastos por *A* e *B* vale $\frac{52}{60 + 8} = \frac{13}{17}$.

Observe que ambos os tempos foram expressos na mesma unidade de tempo (minutos).

3º) Vamos determinar o valor de *x* em cada uma das proporções:

a) $\frac{x}{5} = \frac{24}{15}$

b) $\frac{55 - x}{6} = \frac{3}{4}$

Igualando os produtos cruzados, temos:

a) $15x = 5 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{120}{15} = 8$

b) $4 \cdot (55 - x) = 18 \Rightarrow -4x = -202 \Rightarrow x = \frac{202}{4} = \frac{101}{2}$

4º) Uma empresa pretende alocar 200 mil reais entre pesquisa e propaganda, de modo que a razão entre as quantias seja 2 : 3. Quais os valores alocados para pesquisa e propaganda?

Seja *x* o valor alocado para pesquisa. O valor alocado para propaganda será 200 − x. Portanto, devemos ter:

$$\frac{x}{200 - x} = \frac{2}{3}$$

Igualando os produtos cruzados, obtemos:

$$3x = 2 \cdot (200 - x)$$
$$5x = 400$$
$$x = 80$$

Assim, os valores alocados devem ser 80 mil reais para pesquisa e 120 mil reais para propaganda.

Poderíamos também ter resolvido o problema chamando de *x* o valor alocado para pesquisa e *y* o valor alocado para propaganda. Os valores de *x* e *y* seriam a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

5º) Uma pessoa recebe um salário mensal *S*. Quanto vale $\frac{2}{5}$ de *S*?

Devemos dividir *S* em cinco partes iguais e tomar duas dessas partes.

Assim, $\frac{2}{5}$ de *S* vale:

$$2 \cdot \frac{S}{5} = \frac{2}{5} \cdot S$$

De modo geral, quando quisermos calcular uma razão $\frac{a}{b}$ de um valor *x*, devemos multiplicar a razão pelo valor, isto é, calcular $\frac{a}{b} \cdot x$.

6º) Gustavo gasta $\frac{1}{5}$ de seu salário com a prestação do apartamento, $\frac{1}{8}$ do salário com alimentação e ainda lhe sobram R$ 2 430,00. Qual o salário de Gustavo?

Indicando por *S* o salário de Gustavo, teremos a seguinte equação:

$$\frac{1}{5}S + \frac{1}{8}S + 2\,430 = S$$

cuja solução é:

$$8S + 5S + 97\,200 = 40S$$
$$27S = 97\,200$$
$$S = \frac{97\,200}{27} = 3\,600$$

Portanto, o salário de Gustavo é R$ 3 600,00.

EXERCÍCIOS

1. Calcule as razões abaixo, simplificando o resultado, quando possível:

a) de 2 horas para 45 minutos;
b) de 300 m para 2 km;
c) de 2 m^2 para 400 cm^2;
d) de 5 meses para 2 anos;
e) de 5 minutos e 20 segundos para 2 horas e meia.

2. Numa data *t* o preço de um produto é o triplo do que era na data 0.

a) Qual a razão entre o preço na data *t* e o preço na data 0?
b) Qual a razão entre o aumento de preço ocorrido entre as duas datas e o preço na data 0?

3. Uma pessoa comprou uma ação e a vendeu um mês depois pela metade do preço que pagou na compra.

a) Qual a razão entre os preços de venda e de compra?
b) Qual a razão entre a diferença dos preços de venda e compra e o preço de compra?

4. Um carro percorre 180 km gastando 9 litros de gasolina. Qual a razão entre o número de quilômetros percorridos e o número de litros gastos de gasolina?

5. (UF-GO) Antônio possui um carro a álcool que consome 1 litro de combustível a cada 8 km percorridos, enquanto José possui um carro a gasolina cujo consumo é de 12 km por litro. Sabendo-se que o litro de álcool custa R$ 1,14 e o litro de gasolina R$ 1,60, e que José e Antônio dispõem da mesma quantidade de dinheiro, quantos quilômetros irá percorrer José, tendo em vista que Antônio percorreu 320 km?

6. Calcule o valor de x em cada uma das proporções abaixo:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{5}{12}$ c) $\frac{1}{5} = \frac{3x}{8}$

7. Determine o valor de x na proporção $\frac{3x - 1}{4} = \frac{2}{5}$.

8. Obtenha o valor de m na proporção $\frac{m}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{3 - \frac{2}{5}}$.

9. Certo doce utiliza 3 copos de leite para a produção de 80 unidades. Se a razão entre o número de doces produzidos e o número de copos de leite utilizados for constante, quantos copos de leite serão necessários para se produzirem 720 doces?

10. Um filantropo destina R$ 350 000,00 para serem doados a dois hospitais, A e B. A razão entre a quantia recebida por A e a recebida por B é igual a 4 : 3. Quanto recebeu cada hospital?

11. Dois sócios resolvem repartir seu lucro de R$ 80 000,00 na razão 2 : 3. Quanto caberá a cada um?

12. Numa festa há moças e rapazes num total de 300 pessoas. A razão do número de moças para o de rapazes é $\frac{8}{7}$. Qual o número de rapazes?

13. Uma empresa deseja alocar R$ 200 000,00 entre propaganda e pesquisa. A razão entre a verba destinada à propaganda e a destinada à pesquisa é $\frac{1}{3}$. Quanto deverá ser destinado à propaganda?

14. Quanto vale:

a) $\frac{5}{12}$ de 300? b) $\frac{1}{3}$ de 450? c) $\frac{2}{7}$ de 350?

15. Uma família gasta $\frac{7}{9}$ de sua renda mensal e poupa R$ 800,00. Qual o valor da renda mensal?

16. (Unicamp-SP) Dois estudantes, A e B, receberam Bolsas de Iniciação Científica de mesmo valor. No final do mês, o estudante A havia gasto $\frac{4}{5}$ do total de sua Bolsa, o estudante B havia gasto $\frac{5}{6}$ do total de sua Bolsa, sendo que o estudante A ficou com R$ 8,00 a mais que o estudante B.

a) Qual era o valor da Bolsa?
b) Quantos reais economizou cada um dos estudantes naquele mês?

17. (Unisinos-RS) Colocando-se 27 litros de gasolina no tanque de um carro, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passa a indicar $\frac{5}{8}$. Qual a capacidade total desse tanque de gasolina?

18. (U. F. Viçosa-MG) Suponha que os 169 milhões de reais desviados na construção do TRT de São Paulo sejam reavidos, e que o Governo Federal decida usá-los para investimento nas áreas de saúde, educação e segurança pública, fazendo a seguinte distribuição: a área de educação receberia 2 vezes o que receberia a área de segurança pública; a área de saúde receberia $\frac{2}{3}$ do que receberia a área de educação. Assim sendo, quanto receberia cada área?

II. Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

4. *Grandezas diretamente proporcionais*

Uma pequena loja vende certo tipo de bolsa por R$ 40,00 a unidade. Chamando de x a quantidade vendida e y a receita (em reais) proveniente da venda dessas bolsas, teremos a seguinte correspondência:

x	1	2	3	4	5	...	n	...
y	40	80	120	160	200	...	40n	...

Observe que, quando o valor de x dobra, também dobra o de y; quando triplica o valor de x, também triplica o de y, e assim por diante. Em conseqüência disso, a razão entre cada valor de y e o seu correspondente x vale 40; e a razão entre cada valor de x e o correspondente y também é constante e vale $\frac{1}{40}$. Nesse caso, dizemos que as grandezas expressas por x e y são *diretamente proporcionais*.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são *diretamente proporcionais* quando a razão entre a medida y de uma e a correspondente x da outra ($x \neq 0$) for constante e diferente de zero, isto é, $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante diferente de zero. A razão entre cada valor de x e seu correspondente y também é constante e vale $\frac{1}{k}$.

5. *Grandezas inversamente proporcionais*

Consideremos o seguinte problema:

Numa estrada, a distância entre duas cidades é 240 km. Se um carro percorrer essa estrada a uma velocidade média x (em km/h), o tempo correspondente para ir de uma cidade à outra será y (em horas). Teremos a seguinte correspondência:

x	10	20	30	40	50	...	v	...
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$	...

Observemos que, se a velocidade dobra, o tempo de viagem se reduz à metade; se a velocidade triplica, o tempo de viagem se reduz à terça parte e assim por diante. Conseqüentemente, o produto de cada valor de x pelo correspondente y é constante e vale 240. Dizemos, então, que as grandezas expressas por x e y são *inversamente proporcionais*.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando o produto da medida y de uma e a correspondente x da outra for constante e diferente de zero, isto é, $y \cdot x = k$, em que k é uma constante diferente de zero.

Se x e y forem inversamente proporcionais, y será diretamente proporcional ao inverso de x, pois $\frac{y}{\frac{1}{x}} = k$.

Exemplos

1º) Três sócios *A*, *B* e *C* resolveram abrir uma pizzaria. O primeiro investiu 30 mil reais, o segundo investiu 40 mil reais e o terceiro 50 mil reais. Após 1 ano de funcionamento, a pizzaria deu um lucro de 24 mil reais. Se esse lucro for distribuído aos sócios de forma que a quantia recebida seja diretamente proporcional ao valor investido, quanto recebeu cada um?

Indicando por a, b e c as quantias (em milhares de reais) recebidas por *A*, *B* e *C*, respectivamente, devemos ter:

$a + b + c = 24$ (I) e $\frac{a}{30} = \frac{b}{40} = \frac{c}{50} = k$

Assim:

$a = 30k$ (II)

$b = 40k$ (III)

$c = 50k$ (IV)

Substituindo em (I), temos:

$$30k + 40k + 50k = 24$$

$$120k = 24 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

Logo:

Em (II): $a = 30 \cdot \frac{1}{5} = 6$

Em (III): $b = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$

Em (IV): $c = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10$

Assim, *A* recebeu R$ 6 000,00, *B* recebeu R$ 8 000,00 e *C* recebeu R$ 10 000,00.

2º) Três máquinas levam 2 horas para produzir um lote de 1 000 peças. Se o número de máquinas for inversamente proporcional ao número de horas para produzir o mesmo lote de 1 000 peças, quanto tempo será necessário para se produzir o lote com 4 máquinas?

Seja t o número de horas para se produzir o lote com 4 máquinas. Como o número de máquinas e o tempo de produção são inversamente proporcionais, teremos:

$$t \cdot 4 = (2) \cdot (3) \text{ e, portanto, } t = 1{,}5 \text{ hora}$$

EXERCÍCIOS

19. Na tabela abaixo as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Obtenha os valores de m e p.

x	4	m	7
y	2	7	p

20. As grandezas x e y apresentadas na tabela são inversamente proporcionais. Obtenha os valores de s e p.

x	s	2	8
y	4	5	p

21. A tabela a seguir fornece o tempo de assinatura de uma revista e o correspondente preço. Obtenha os valores de a, b e c sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais.

Tempo de assinatura (em meses)	Preço (em reais)
6	30,00
12	a
b	90,00
24	c

22. A renda de um profissional liberal é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas. Se ele trabalha 20 horas, sua renda é R$ 600,00. Qual será sua renda se ele trabalhar 65 horas?

23. O número de litros de gasolina que um carro consome na estrada é diretamente proporcional ao número de quilômetros percorridos. Se ele consome 5 litros para percorrer 74 quilômetros, quanto consumirá para percorrer 380 quilômetros?

24. Augusto e César investiram R$ 12 000,00 e R$ 15 000,00, respectivamente, num negócio que proporcionou um lucro de R$ 7 500,00. Quanto coube a cada um, se o lucro recebido for diretamente proporcional ao valor investido?

25. Dividir a quantia de R$ 22 000,00 em 3 partes diretamente proporcionais aos números 2, 4 e 5.

26. Três sócios, A, B e C, investiram R$ 80 000,00, R$ 90 000,00 e R$ 120 000,00, respectivamente, na construção de uma casa. A casa foi vendida por R$ 360 000,00. Quanto coube a cada sócio, se cada um recebeu uma quantia diretamente proporcional ao valor que investiu?

27. O lucro de uma empresa foi dividido entre seus 3 sócios, A, B e C, em partes diretamente proporcionais a 3, 2 e 5, respectivamente. Sabendo que A recebeu R$ 50 000,00 a mais que B, obtenha quanto recebeu cada sócio.

28. Um escritório leva 60 horas para ser pintado por 4 pintores. Se o número de horas trabalhadas para pintar o escritório for inversamente proporcional ao número de pintores, em quantas horas 5 pintores pintarão o escritório?

29. Quatro pedreiros gastam 10,5 dias para construir um muro. Se o número de pedreiros for inversamente proporcional ao número de dias gastos na construção do muro, em quantos dias sete pedreiros construirão o muro?

30. Mantida a temperatura constante de um gás, a sua pressão P e o seu volume V são inversamente proporcionais (Lei de Boyle). Se a pressão sofrer um acréscimo de $\frac{1}{5}$, qual a correspondente diminuição do volume?

31. Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais. Quando $x = 4$, temos $y = 20$. Qual o valor de x para $y = 18$?

32. Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais. Quando $x = 3$, temos $y = 12$. Qual o valor de x para $y = 18$?

33. A grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de x. Quando $x = 4$, temos $y = 10$. Qual o valor de y para $x = 5$?

34. A grandeza y é inversamente proporcional ao cubo de x. Quando $x = 4$, temos $y = 100$. Qual o valor de y para $x = 5$?

35. (UF-GO) Diz-se que duas grandezas positivas, x e y, são diretamente proporcionais, quando existe uma função linear $f(x) = k \cdot x$, com $k > 0$, chamada constante de proporcionalidade, tal que $y = f(x)$ para todo $x > 0$. De modo análogo, diz-se que x e y são inversamente proporcionais, quando existe uma função $g(x) = \frac{c}{x}$, com $c > 0$, tal que $y = g(x)$, para todo $x > 0$. De acordo com essas definições, julgue os itens abaixo.

a) Se $y = g_1(x)$ e $z = g_2(y)$ e os pares de grandezas x, y e y, z são ambos inversamente proporcionais, então x e z são grandezas diretamente proporcionais.

b) Se $y = f(x)$, com x e y sendo grandezas diretamente proporcionais, e $w = g(z)$, com z e w sendo grandezas inversamente proporcionais, então o quociente $\frac{y}{w}$ e o produto $x \cdot z$ formam um par de grandezas diretamente proporcionais.

c) Se x_1, y_1 e x_2, y_2 são pares de grandezas diretamente proporcionais, com a mesma constante de proporcionalidade, então $x_2y_1 = x_1y_2$.

d) A área a e o lado ℓ de um hexágono regular ($a = f(\ell)$, para todo $\ell > 0$) são grandezas diretamente proporcionais.

III. Porcentagem

Consideremos os valores do Produto Interno Bruto (PIB) de dois países, A e B, em bilhões de dólares, em dois anos consecutivos que chamaremos de 0 e 1.

País	PIB (ano 0)	PIB (ano 1)	Crescimento do PIB (entre 0 e 1)
A	400	432	32
B	600	642	42

Verificamos que a razão entre o crescimento do PIB e o PIB do ano 0 vale:

- $\frac{32}{400}$ para o país A;
- $\frac{42}{600}$ para o país B.

Uma das maneiras de compararmos essas razões consiste em expressarmos ambas com o mesmo denominador, por exemplo, 100. Assim:

- País A: $\frac{32}{400} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 8$; portanto, a razão vale $\frac{8}{100}$.
- País B: $\frac{42}{600} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 7$; portanto, a razão vale $\frac{7}{100}$.

Dessa forma, concluímos que o país A teve uma razão (ou taxa) maior de crescimento do PIB.

Essas razões de denominador 100 são chamadas de *razões centesimais*, *taxas percentuais* ou simplesmente de *porcentagens*.

As porcentagens costumam ser indicadas pelo numerador seguido do símbolo % (lê-se: "por cento"). Assim, a taxa percentual de crescimento do PIB do país A foi de 8% e a do país B de 7%.

As porcentagens também costumam ser expressas sob a forma decimal, obtida dividindo-se o numerador por 100. Essa é a maneira habitual quando se utiliza uma calculadora. Por exemplo:

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03 \qquad 32\% = \frac{32}{100} = 0,32$$

$$27,5\% = \frac{27,5}{100} = 0,275 \qquad 250\% = \frac{250}{100} = 2,5$$

A porcentagem pode ser utilizada quando queremos expressar alguma quantidade como porcentagem de um valor. Suponhamos que um produto que custava R$ 80,00 foi vendido com um desconto de 5%. O desconto de 5% sobre 80 corresponde à divisão do preço por 100, tomando 5 partes, isto é:

$$5\% \text{ de } 80 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{80}{100} = \frac{5}{100} \cdot 80 = 4$$

De modo geral, calcular a% de x, corresponde a multiplicar $\frac{a}{100}$ por x.

Exemplos

1º) Converta as razões abaixo para a forma decimal, arredondando para quatro casas decimais, quando for o caso, e em seguida coloque-as na forma de porcentagem. Se possível, use uma calculadora.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{50}$ c) $\frac{45}{18}$ d) $\frac{14}{42}$

Convertendo as razões, temos:

a) $\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = 75\%$

b) $\frac{8}{50} = 0,16 = \frac{16}{100} = 16\%$

c) $\frac{45}{18} = 2,5 = \frac{250}{100} = 250\%$

d) $\frac{14}{42} = 0,3333 = \frac{33,33}{100} = 33,33\%$

2º) Um investidor comprou um terreno por R$ 15 000,00 e vendeu-o, um ano depois, por R$ 18 750,00. Qual o lucro, em porcentagem, do preço de custo?

Temos o lucro (em reais): 18 750 − 15 000 = 3 750

Assim, o lucro (em porcentagem) do preço de custo será:

$$\frac{3\,750}{15\,000} = 0,25 = 25\%$$

3º) Em um curso de Biologia, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{2}{5}$.

Em relação ao total de alunos, qual a porcentagem de homens?

Seja x o número de homens e y o de mulheres:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \quad \text{(I)}$$

Para saber o valor de $\frac{x}{x + y}$ (II), calculamos (I):

$$x = \frac{2y}{5} = 0,4y$$

Substituindo em (II), obtemos:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{0,4y}{0,4y + y} = \frac{0,4y}{1,4y} = 0,2857 = 28,57\%$$

Então, a porcentagem de homens é 28,57%.

4º) Uma corrente de ouro cujo preço de tabela é R$ 360,00 é vendida com um desconto de 15%. Qual o preço após sofrer o desconto?

O desconto (em reais) é:

$$\frac{15}{100} \cdot 360 = (0,15) \cdot 360 = 54$$

Então, o preço, em reais, após o desconto é:

$$360 - 54 = 306$$

5º) Uma geladeira é vendida por R$ 1 200,00. Se seu preço sofrer um acréscimo igual a 8% desse preço, quanto passará a custar?

O preço original, em reais, é: 1 200.

Calculando o acréscimo, temos:

$$\frac{8}{100} \cdot 1\,200 = (0,08) \cdot 1\,200 = 96$$

Dessa forma, o preço (em reais) após o acréscimo será:

$$1\,200 + 96 = 1\,296$$

6º) Um funcionário de uma empresa cujo salário mensal vale S paga uma prestação P do financiamento de seu apartamento. Se o seu salário sofrer um acréscimo de 10% e a prestação do apartamento sofrer um acréscimo de 12%:

a) qual o valor do salário reajustado?

b) qual o valor da prestação reajustada?

Resolvendo, temos:

a) Acréscimo salarial:

$$\frac{10}{100} \cdot S = 0,10 \cdot S$$

Assim, o salário reajustado é:

$$S + 0,10 \cdot S = 1,10 \cdot S$$

b) Acréscimo na prestação:

$$\frac{12}{100} \cdot P = 0,12 \cdot P$$

A prestação reajustada é:

$$P + 0,12 \cdot P = 1,12 \cdot P$$

7º) Uma televisão foi vendida com um desconto de R$ 42,00, sendo esse valor igual a 3,5% do preço original. Qual o preço da televisão após o desconto?

Seja x o preço original da televisão.

O desconto é:

$$0{,}035x = 42$$

Portanto, o preço original da TV (em reais) é:

$$x = \frac{42}{0{,}035} = 1\,200$$

O preço da televisão após o desconto (em reais) será:

$$1\,200 - 42 = 1\,158$$

8º) Quando uma empresa produz determinado produto, ela incorre em dois tipos de custos: o *custo fixo*, que não depende da quantidade produzida (como, por exemplo, o aluguel) e o *custo variável*, que depende da quantidade produzida. Geralmente, o custo variável é dado por $c \cdot x$, em que c é o custo por unidade (depende, entre outros, do custo da matéria-prima e da mão-de-obra) e x é a quantidade produzida.

Sendo p o preço de venda, chamamos de *margem de contribuição por unidade* à diferença $p - c$. A margem de contribuição unitária multiplicada pela quantidade produzida e vendida serve para cobrir o custo fixo e proporcionar lucro.

A margem de contribuição por unidade pode ser expressa como porcentagem do preço de custo ou como porcentagem do preço de venda.

Suponhamos $p = 120$ e $c = 90$, expressos em reais. Então:

A margem de contribuição vale:

$$120 - 90 = 30$$

A margem de contribuição como porcentagem do preço de custo é:

$$\frac{30}{90} = 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

A margem de contribuição como porcentagem do preço de venda é:

$$\frac{30}{120} = 0{,}25 = 25\%$$

9º) Num determinado país, o *imposto de renda* (IR) é descontado dos salários mensais da seguinte forma:

- Para salários até $ 1 000,00 o IR é zero.
- A parte do salário entre $ 1 000,00 e $ 3 000,00 é tributada em 10%.
- A parte do salário que excede $ 3 000,00 é tributada em 20%.

Calcule o valor do imposto de renda de quem ganha:

a) $ 800,00;

b) $ 1 800,00;

c) $ 4 500,00;

d) Chamando de x a renda e de y o imposto de renda, expresse y em função de x.

Assim, temos:

a) O IR vale 0, pois o salário é inferior a $ 1 000,00.

b) O IR é calculado sobre $ 800,00, que é a parte do salário entre $ 1 000,00 e $ 3 000,00.

Portanto, $IR = (0{,}10) \cdot 800{,}00 = 80{,}00$.

c) A parte do salário entre $ 1 000,00 e $ 3 000,00 e que vale $ 2 000,00 é tributada em 10% e vale portanto

$(0{,}10) \cdot 2\,000{,}00 = 200{,}00$.

A parte do salário que excede $ 3 000,00 e que vale $ 1 500,00 é tributada em 20% e vale portanto

$(0{,}20) \cdot 1\,500{,}00 = 300{,}00$.

Assim, o IR de quem ganha $ 4 500,00 vale

$ 200,00 + $ 300,00 = $ 500,00.

d) Se $x \leq 1\,000$, então $y = 0$.

Se $1\,000 < x \leq 3\,000$, então

$y = (0{,}10) \cdot (x - 1\,000) = 0{,}10 \cdot x - 100$.

Se $x > 3\,000$, então

$y = (0{,}10) \cdot 2\,000 + (0{,}20) \cdot (x - 3\,000) = 0{,}20 \cdot x - 400$.

Esses resultados geralmente são indicados pela tabela seguinte:

Salário	Alíquota de IR	Parcela a deduzir
Até $ 1 000,00	Isento	———
Acima de $ 1 000,00 até $ 3 000,00	10%	$ 100,00
Acima de $ 3 000,00	20%	$ 400,00

EXERCÍCIOS

36. Calcule as razões a seguir com quatro casas decimais e, em seguida, expresse-as em forma de porcentagem. (Se possível, use uma calculadora.)

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{15}{9}$ d) $\frac{234}{5}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{8}{5}$ g) $\frac{1}{10}$

37. Calcule as seguintes porcentagens:

a) 12% de 300 b) 32% de 450 c) 18% de 550 d) 60% de 80 e) 3,4% de 2 500 f) 10,5% de 600

38. (UF-RJ) A organização de uma festa distribuiu gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingresso foram à festa.

a) Determine o percentual de mulheres na festa.

b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e de mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para as pessoas do sexo feminino?

39. (UF-MS) Em um determinado município, a porcentagem de crianças que estão fora da escola é de 15%. O prefeito desse município iniciou uma campanha com a finalidade de que 5 em cada 9 dessas crianças passem a freqüentar uma escola imediatamente. Se a meta da campanha for atingida, o número de crianças que estarão fora da escola nesse município ficará reduzido a 1 200 crianças. Assim, se N era o número de crianças desse município, quando do início da campanha, calcule $\frac{N}{250}$.

40. (UF-PE) Em 1995 o Banco do Brasil (BB) renegociou a dívida de R$ 7,1 bilhões dos agricultores, que foi dividida em parcelas a serem pagas até o final de cada ano. O valor total da primeira parcela era R$ 700 milhões, mas somente metade foi pago; da segunda parcela (totalizando R$ 1,1 bilhão) vencida em 1997 somente foi pago 26% do devido. Em 1997 o lucro líquido do BB foi de R$ 646,4 milhões. Quantas vezes a dívida restante dos agricultores no início de 1998 vale o lucro líquido do BB em 1997?

41. (UF-CE) Manuel compra 100 caixas de laranjas por R$ 2 000,00. Havendo um aumento de 25% no preço de cada caixa, quantas caixas ele poderá comprar com a mesma quantia?

42. (UF-PA) Um terreno retangular, cujas dimensões são 400 m e 500 m, será usado para abrigar famílias remanejadas da área de macrodrenagem. Pretende-se fazer lotes de 20 m × 20 m para cada família e usar uma área equivalente a 20% da área total para um complexo de lazer e para circulação. Quantas famílias podem ser alocadas?

43. (UF-GO) O sr. Manuel contratou um advogado para receber uma dívida cujo valor era de R$ 10 000,00. Por meio de um acordo com o devedor, o advogado conseguiu receber 90% do total da dívida. Supondo que o sr. Manuel pagou ao advogado 15% do total recebido, quanto dinheiro lhe restou?

44. (U. F. Lavras-MG) Desde janeiro de 1994 que não se paga determinado imposto por um salário anual de até R$ 10 000,00. Acima desse valor, paga-se uma taxa de 17,5% do valor recebido que exceda os R$ 10 000,00. Em janeiro de 1994, o dólar valia R$ 1,00. Considere que para o ano de 2000, o valor seja de R$ 1,60.

a) Calcule o valor, em reais, do imposto a ser pago no ano de 2000, por um salário anual de 10 000 dólares.

b) Calcule o valor, em dólares, de um salário anual no ano de 2000, não sujeito ao imposto.

45. (UF-CE) Um vendedor recebe a título de rendimento mensal um valor fixo de R$ 160,00 mais um adicional de 2% das vendas por ele efetuadas no mês. Com base nisso, responda:

a) Qual o rendimento desse vendedor em um mês no qual o total de vendas feitas por ele foi de R$ 8 350,00?

b) Qual a função que expressa o valor do seu rendimento mensal em função de sua venda mensal?

46. (UF-GO) O jovem Israel trabalha em uma sapataria. Ele gasta do seu salário: 25% no pagamento do aluguel da pequena casa onde mora; $\frac{1}{10}$ na compra de vale-transporte; 15% na prestação do aparelho de TV que adquiriu; e ainda lhe sobram R$ 84,00. Qual o salário de Israel?

47. (UF-GO) O sr. José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

48. (UFF-RJ) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, esta confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. Determine a variação, em porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.

49. Um casaco cujo preço original era de R$ 250,00 sofreu um desconto de 15% em função de uma liquidação. Qual o preço após o desconto?

50. (EEM-SP) Uma lanchonete vende cada quibe por R$ 0,19 e um copo com 300 mL de refrigerante por R$ 1,00. Com o objetivo de estimular as vendas, a empresa pretende vender um combinado constituído de 10 quibes e um copo com 480 mL de refrigerante. Qual deve ser o preço a ser cobrado, se a lanchonete deseja dar 10% de desconto?

51. Um fogão que custava R$ 500,00 sofreu um aumento de 8%. Em razão da falta de demanda, o vendedor resolveu oferecer um desconto de 8% sobre o preço com acréscimo.

Qual o preço final do fogão, após o acréscimo seguido de desconto?

52. (U. F. Uberlândia-MG) No mês de agosto, Pedro observou que o valor da sua conta de energia elétrica foi 50% superior ao valor da sua conta de água. Em setembro, tanto o consumo de energia elétrica, quanto o de água, na residência de Pedro, foram iguais aos consumos do mês de agosto. Porém, como as tarifas de água e energia elétrica foram reajustadas em 10% e 20%, respectivamente, Pedro desembolsou R$ 20,00 a mais do que em agosto para quitar as duas contas. Quanto Pedro pagou de energia elétrica no mês de setembro?

53. Um aparelho de som que custava R$ 700,00 sofreu um acréscimo de 6% sobre o preço original.

a) Qual o novo preço do aparelho de som?
b) Suponhamos um desconto de 3% sobre o novo preço. Qual será o preço do aparelho com esse desconto?
c) Se o preço de R$ 700,00 sofresse um acréscimo de 120%, qual seria o novo preço?

54. (Vunesp-SP) Um determinado carro popular custa numa revendedora R$ 11 500,00 à vista. Numa promoção de Natal, realizada no mês de dezembro de 1998, com R$ 5 000,00 de entrada, um comprador tem o valor restante do carro facilitado pela revendedora em 36 prestações mensais, sendo que as prestações num mesmo ano são iguais e que a cada ano a prestação sofre um aumento de 10%, relativamente à do ano anterior. Sabendo-se que a primeira prestação, a ser paga no mês de janeiro de 1999, é R$ 200,00, determine:

a) quanto o comprador desembolsará ao final de cada ano, excluindo-se a entrada;
b) qual o valor total a ser desembolsado pelo comprador ao findar seus pagamentos.

55. (UF-RN) Dois supermercados (X e Y) vendem leite em pó, de uma mesma marca, ao preço de R$ 4,00 a lata. Numa promoção, o supermercado X oferece 4 latas pelo preço de 3, e o supermercado Y dá um desconto de 20% em cada lata adquirida.

Responda, justificando, em qual dessas promoções você economizaria mais, se comprasse:

a) 12 latas   b) 11 latas

56. (UF-AL) Analise as afirmativas abaixo:

1) 12% de R$ 200,00 correspondem a R$ 2,40.
2) Obtém-se 30% de uma quantia multiplicando-a por 0,3.
3) Três pessoas correspondem a 6% de um grupo de 50 pessoas.
4) $\frac{2}{5} = 4\%$
5) Um preço X que sofre um desconto de 20% passa a ser $0,8 \cdot X$

57. Calcule o valor de x:

a) 30% de $x = 24$ b) 25% de $x = 120$ c) 180% de $x = 540$

58. (UF-RJ) A comissão de um corretor de imóveis é igual a 5% do valor de cada venda efetuada.

a) Um apartamento foi vendido por R$ 62 400,00. Determine a comissão recebida pelo corretor.
b) Um proprietário recebe, pela venda de uma casa, R$ 79 800,00, já descontada a comissão do corretor. Determine o valor da comissão.

59. Um aparelho de fax passou a custar R$ 360,00 após seu preço original sofrer um desconto de 10%. Qual o preço original do aparelho?

60. (UF-CE) O preço de um aparelho elétrico com um desconto de 40% é igual a R$ 36,00. Calcule, em reais, o preço desse aparelho elétrico, sem esse desconto.

61. (Unicamp-SP) Uma pessoa possui a quantia de R$ 7 560,00 para comprar um terreno, cujo preço é de R$ 15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

a) Qual é o custo final de cada m^2 do terreno?

b) Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui?

62. Numa conta telefônica, em São Paulo, incide o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) que é igual a 18% do valor total a ser pago. Um consumidor recebeu uma conta a pagar de R$ 165,00.

a) Qual o valor da conta antes da incidência do ICMS?

b) Se a alíquota de 18% incidisse sobre o valor obtido no item *a*, qual o valor da conta a ser paga?

63. (UnB-DF) Em uma cidade, há 10 000 pessoas aptas para o mercado de trabalho. No momento, apenas 7 000 estão empregadas. A cada ano, 10% das que estão empregadas perdem o emprego, enquanto 60% das desempregadas conseguem se empregar. Considerando que o número de pessoas aptas para o mercado de trabalho permaneça o mesmo, calcule o percentual de pessoas empregadas daqui a 2 anos. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

64. (Unicamp-SP) Segundo dados do Ministério do Trabalho e Emprego (MTE), no período de julho de 2000 a junho de 2001, houve dez milhões, cento e noventa e cinco mil, seiscentos e setenta e uma admissões ao mercado formal de trabalho no Brasil, e os desligamentos somaram nove milhões, quinhentos e cinqüenta e quatro mil, cento e noventa e nove. Pergunta-se:

a) Quantos novos empregos formais foram criados durante o período referido?

b) Sabendo-se que esse número de novos empregos resultou em um acréscimo de 3% no número de pessoas formalmente empregadas em julho de 2000, qual o número de pessoas formalmente empregadas em junho de 2001?

65. (Vunesp-SP) Uma empresa agropecuária desenvolveu uma mistura, composta de fécula de batata e farinha, para substituir a farinha de trigo comum. O preço da mistura é 10% inferior ao da farinha de trigo comum. Uma padaria fabrica e vende 5 000 pães por dia. Admitindo-se que o *kg* da farinha comum custa R$ 1,00 e que com 1 kg de farinha ou da nova mistura a padaria fabrica 50 pães, determine:

a) a economia, em reais, obtida em um dia, se a padaria usar a mistura em vez de farinha de trigo comum;

b) o número inteiro máximo de quilos da nova mistura que poderiam ser comprados com a economia obtida em um dia e, com esse número de quilos, quantos pães a mais poderiam ser fabricados por dia.

66. (UnB-DF) Duas empresas de táxi, *X* e *Y*, praticam regularmente a mesma tarifa. No entanto, com o intuito de atrair mais passageiros, a empresa *X* decide oferecer um desconto de 50% em todas as suas corridas, e a empresa *Y*, descontos de 30%. Com base nessas informações e considerando o período de vigência dos descontos, julgue os itens a seguir:

1) Se um passageiro pagou R$ 8,00 por uma corrida em um táxi da empresa *Y*, então, na tarifa sem desconto, a corrida teria custado menos de R$ 11,00.

2) Ao utilizar um táxi da empresa *Y*, um passageiro paga 20% a mais do que pagaria pela mesma corrida, se utilizasse a empresa *X*.

3) Considere que, no mês de fevereiro, com 20 dias úteis, uma pessoa fez percursos de ida e volta ao trabalho, todos os dias, nos táxis da empresa *Y*, e, no final do mês, pagou R$ 80,00. Nessas condições, para fazer os mesmos percursos de ida e volta ao trabalho, no mês seguinte, com 24 dias úteis, nos táxis da empresa *X*, a pessoa pagaria mais de R$ 70,00.

67. (UnB-DF, adaptado) Em uma empresa, o salário mensal de um estagiário é de R$ 400,00, o de um técnico é o dobro desse valor e o de cada gerente é igual a R$ 2 800,00. O valor total da folha de pagamento de pessoal dessa empresa é de R$ 20 800,00 mensais e o salário médio mensal é de R$ 520,00. A direção da empresa decide, por questões de economia, reduzir a folha de pagamento mensal em 2%, distribuídos da seguinte maneira: uma redução de 1% nos salários dos estagiários, de 3% nos dos técnicos e de 5% nos dos gerentes. Sendo *E* a quantidade de estagiários, *T* a de técnicos e *G* a de gerentes, julgue os itens a seguir:

1) $E + T + G \leq 52$

2) $396\,E + 776\,T + 2\,660\,G = 20\,384$

68. Calcule:

a) Quanto vale 20% de 30% de um valor?

b) Quanto vale 10% de 50% de um valor?

c) Quanto vale 160% de 300% de um valor?

69. Em uma pesquisa de opinião foram ouvidas *x* pessoas, dentre as quais 63% eram mulheres. Entre os homens, 45% tinham nível universitário. Qual é, em função de *x*, o número de homens entrevistados sem formação universitária?

70. A primeira fase de um vestibular foi feita por 48 000 candidatos, dos quais 65% não passaram para a fase seguinte. Entre os que fizeram a segunda fase, 68% não foram aprovados. Quantos candidatos conseguiram ingressar na faculdade por meio desse exame?

71. (UF-PE) Em um exame de vestibular 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre esses candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a porcentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração.

72. Calcule e expresse o resultado em forma de porcentagem:

a) $(10\%)^2$ b) $(20\%)^2$ c) $(10\%) \cdot (20\%)$ d) $(120\%) \cdot (350\%)$

73. (FGV-SP) Chama-se margem de contribuição unitária à diferença entre o preço unitário de venda e o custo unitário de um produto.

Se o preço unitário de venda é p e o custo unitário é c:

a) Qual o valor de p em função de c, sabendo-se que a margem de contribuição unitária é 10% do preço de venda?

b) Se a margem de contribuição unitária for 30% do preço de venda, qual a margem de contribuição unitária, em porcentagem, do custo unitário?

74. Calcule o valor solicitado em cada caso:

a) A margem de contribuição unitária é igual a 18% do preço de venda de um produto. Qual a margem como porcentagem do custo por unidade?

b) A margem de contribuição unitária é igual a 140% do custo por unidade. Qual a margem como porcentagem do preço de venda?

75. De acordo com uma reportagem publicada na revista *Veja São Paulo*, cerca de 100 unidades de churrasco grego são vendidas diariamente, em média, em cada barraca. A porção de churrasco mais um copo de suco custam apenas R$ 0,70. O custo do referido produto aparece discriminado na tabela ao lado.

Pão	R$ 0,11
Carne	R$ 0,20
Legumes	R$ 0,03
Suco	R$ 0,07
Total	**R$ 0,41**

Fonte: *Veja São Paulo*, 11/6/2003.

a) Qual a margem de contribuição por unidade do produto?

b) Se o produtor trabalhar 25 dias por mês e tiver um custo fixo mensal de R$ 40,00, qual será seu lucro nesse período?

76. (Ibmec-SP, adaptado) Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações e justifique sua resposta.

a) O Produto Nacional Bruto (PNB) de um país cresceu 30% em um ano, enquanto no mesmo período sua população cresceu 20%. Então, para esse mesmo período, o crescimento do PNB *per capita* (PNB dividido pela população) foi de 10%.

b) Carlos vendeu um apartamento com um lucro de 20% em relação ao preço de venda, então seu lucro em relação ao custo foi de 25%.

77. (UF-GO) Um comerciante que compra e revende coco adquire cada unidade do produto por R$ 0,34. Esse comerciante tem uma despesa, na comercialização, que representa, em média, por unidade, 10% do preço final de venda ao consumidor. O lucro em cada unidade é de 50% do custo total (preço de compra mais custo de comercialização). Com base no exposto, classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir:

1) O preço de venda, de cada unidade, ao consumidor é maior que R$ 0,70.

2) Se o comerciante faturou R$ 600,00 com a venda dos cocos, seu lucro foi de R$ 200,00.

3) Se o comerciante vender em determinado dia o dobro de unidades do dia anterior, seu lucro será o dobro do lucro do dia anterior.

4) Para que o comerciante tenha lucro de R$ 500,00, ele deverá vender 2 500 cocos.

78. O dono de uma padaria comprou um pacote de chocolate com 100 unidades pagando R$ 120,00. Se ele vender 40 unidades com uma margem de contribuição unitária igual a 50% do custo unitário, e 60 unidades com uma margem de 30% sobre o custo unitário, qual a receita de venda das 100 unidades?

79. (UF-PA) Para produzir determinado artigo, uma indústria tem dois tipos de despesa: uma fixa e uma variável. A despesa fixa foi estimada em R$ 90,00 (noventa reais), e a variável deverá corresponder a 30% do total das vendas. Se para o mês de março de 2001 pretende-se que o lucro em relação ao produto represente 20% do total de vendas, qual deve ser, em reais, o volume de vendas e de quanto será o lucro?

80. (UF-ES) Humberto comprou seis exemplares de um livro, um para ele e cinco para dar de presente a seus amigos. Os livros foram comprados com 20% de desconto sobre o preço original. Pela remessa de cada um dos cinco livros, ele pagou 5% sobre o valor unitário de compra (com desconto) mais R$ 1,00 pela embalagem. Ao todo, ele gastou R$ 289,00. Qual o preço original do livro?

81. (U. F. Viçosa-MG) Uma indústria fabrica dois tipos de produto, X e Y, com custo por unidade de R$ 4,00 e R$ 10,00, respectivamente. Sabendo que essa indústria vendeu 260 unidades dos produtos X e Y com preços 50% e 40%, respectivamente, acima de seu valor de custo, obtendo R$ 2 680,00 com a venda, determine a quantidade de cada produto.

82. (Fuvest-SP) No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões que ele começou a vender ao preço unitário de R$ 2,00. A partir das dez horas reduziu o preço em 20% e a partir das onze horas passou a vender cada melão por R$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R$ 461,00.

a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?

b) Sabendo que $\frac{5}{6}$ dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

83. (FGV-SP) No Brasil, quem ganha um salário mensal menor ou igual a R$ 900,00 está isento do pagamento do imposto de renda (IR). Quem ganha um salário mensal acima de R$ 900,00 até R$ 1 800,00 paga um IR igual a 15% da parte de seu salário que excede R$ 900,00; quem ganha um salário mensal acima de R$ 1 800,00 paga um IR igual a R$ 135,00 (correspondente a 15% da parte do salário entre R$ 900,00 e R$ 1 800,00) mais 27,5% da parte do salário que excede R$ 1 800,00.

a) Qual o IR pago por uma pessoa que recebe um salário mensal de R$ 1 400,00?
b) Uma pessoa pagou um IR de R$ 465,00 num determinado mês. Qual o seu salário nesse mês?

Observação: os dados são do ano 2000.

84. (UF-PR, adaptado) O imposto de renda (IR) a ser pago mensalmente é calculado com base na tabela da Receita Federal, da seguinte forma: sobre o rendimento base aplica-se a alíquota correspondente; do valor obtido, subtrai-se a "parcela a deduzir"; o resultado é o valor do imposto a ser pago.

Rendimento base (R$)	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
Até 900,00	Isento	——
De 900,01 a 1 800,00	15%	135,00
Acima de 1 800,00	27,5%	360,00

Fonte: Receita Federal, agosto de 1999.

Em relação ao IR do mês de agosto de 1999, considerando apenas as informações da tabela, classifique como *verdadeiro* ou *falso* cada um dos itens a seguir:

1) Sobre o rendimento base de R$ 1 000,00, o valor do imposto é R$ 15,00.
2) Para rendimentos base maiores que R$ 900,00, ao se triplicar o rendimento base, triplica-se também o valor do imposto.
3) Sendo x o rendimento base, com $x > 1\,800$, uma fórmula para o cálculo do imposto y é: $y = 0{,}275x - 360$, considerando x e y em reais.

85. Em outubro de 2003, vigorava no Brasil a seguinte tabela para o cálculo do imposto de renda sobre os salários.

Base de cálculo mensal	Alíquota
Até R$ 1 058,00	——
Acima de R$ 1 058,00 a R$ 2 115,00	15%
Acima de R$ 2 115,00	27,5%

a) Qual o imposto de renda de quem ganha um salário mensal de R$ 900,00?
b) Qual o imposto de renda de quem ganha um salário mensal de R$ 1 500,00?
c) Qual o imposto de renda de quem ganha um salário mensal de R$ 3 000,00?
d) Expresse, em forma de tabela, o imposto de renda em função do salário.

86. (Vunesp-SP) Suponhamos que, para uma dada eleição, uma cidade tivesse 18 500 eleitores inscritos. Suponhamos ainda que, para essa eleição, no caso de se verificar um índice de abstenções de 6% entre os homens e de 9% entre as mulheres, o número de votantes do sexo masculino será exatamente igual ao de votantes do sexo feminino. Determine o número de eleitores inscritos de cada sexo.

IV. Variação percentual

Suponhamos que, no início de certo mês, o preço de determinado produto seja R$ 20,00 e, no final do mês, o preço tenha aumentado para R$ 21,00. O aumento de preço foi de R$ 1,00; a razão entre o aumento e o preço inicial, expressa na forma de porcentagem, é chamada de *variação percentual* de preço entre as datas consideradas. Assim, indicando a variação percentual por j, teremos:

$$j = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

De modo geral, consideremos uma grandeza que assuma um valor V_0 na data 0 e o valor V_t numa data futura t. Chamamos de *variação percentual* dessa grandeza entre as datas 0 e t, e indicamos por j o número dado por:

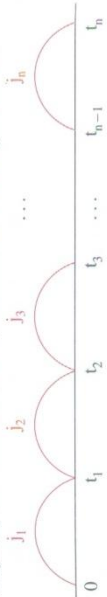
$$j = \frac{V_t - V_0}{V_0}$$

Observemos que, pela propriedade distributiva, a variação percentual j também pode ser expressa por:

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

Quando a variação percentual é positiva, denomina-se *taxa percentual de crescimento*, e, quando é negativa, seu valor absoluto é denominado *taxa percentual de decrescimento* (desde que $V_0 > 0$ e $V_t > 0$).

6. *Variações percentuais sucessivas*

Consideremos os instantes de tempo 0, t_1, t_2, t_3, ... t_{n-1}, t_n, em que $0 < t_1 < t_2 < t_3 ... < t_n$, e chamemos de j_1 a variação percentual da grandeza entre 0 e t_1. Denominamos j_2 a variação percentual da grandeza entre t_1 e t_2 e assim sucessivamente até j_n, que representa a variação percentual da grandeza entre t_{n-1} e t_n. Os valores j_1, j_2, j_3 ... j_n são chamados de *variações percentuais sucessivas*, conforme mostra a figura abaixo:

7. *Variações percentuais acumuladas*

Se indicarmos por V_0, V_1, V_2, ..., V_n os valores da grandeza nas datas 0, t_1, t_2, t_3, ... t_{n-1}, t_n, poderemos escrever:

- $j_1 = \frac{V_1}{V_0} - 1 \Rightarrow V_1 = V_0(1 + j_1)$
- $j_2 = \frac{V_2}{V_1} - 1 \Rightarrow V_2 = V_1(1 + j_2) = V_0(1 + j_1)(1 + j_2)$
- $j_3 = \frac{V_3}{V_2} - 1 \Rightarrow V_3 = V_2(1 + j_3) = V_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)$

Assim, concluímos que:

$$\boxed{V_n = V_0\,(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3) \ldots (1 + j_n)}$$

À variação percentual entre as datas 0 e t_n damos o nome de *variação percentual acumulada*, também conhecida como j_{ac}, expressa por:

$$j_{ac} = \frac{V_n}{V_0} - 1$$

Substituindo o numerador, temos:

$$j_{ac} = \frac{V_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3) \ldots (1 + j_n)}{V_0} - 1$$

$$\boxed{j_{ac} = (1 + j_1) \cdot (1 + j_2) \cdot (1 + j_3) \ldots (1 + j_n) - 1}$$

Exemplos

1º) No final de um ano o número de habitantes de uma cidade era igual a 40 000 e no final do ano seguinte esse número subiu para 41 000. Qual a variação percentual entre as datas consideradas?

A variação percentual pode ser calculada da seguinte forma:

$$j = \frac{41\,000}{40\,000} - 1 = 0{,}025 = 2{,}5\%$$

Como $j > 0$, dizemos que a população cresceu a uma taxa de 2,5%.

2º) Em 20/5/2003 o preço de uma ação era R$ 205,00 e em 7/7/2003 o preço caiu para R$ 190,00. Qual a variação percentual?

A variação percentual é dada por:

$$j = \frac{190}{205} - 1 = -0{,}0732 = -7{,}32\%$$

Como $j < 0$, dizemos que o preço da ação decresceu a uma taxa de 7,32% no período.

3º) O lucro de uma empresa foi de R$ 300 000,00 em 2003.

a) Qual o lucro em 2004 se nesse ano ele crescer 5%?

b) Qual o lucro em 2006 se ele crescer 5% em 2004, 6% em 2005 e 7% em 2006?

Chamando de V_0 o lucro em 2003, V_1 em 2004, V_2 em 2005 e V_3 em 2006, teremos:

a) $V_1 = 300\,000(1 + 0{,}05) = 315\,000$

O lucro em 2004 é R$ 315 000,00.

b) $V_3 = 300\,000(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}06)(1 + 0{,}07) = 357\,273$

O lucro em 2006 é R$ 357 273,00.

4º) O preço de um automóvel 0 km era R$ 25 000,00. Um ano depois, o preço teve um decréscimo de 15% e, após mais um ano, teve outro decréscimo de 10%.

a) Qual o preço do automóvel dois anos depois?

b) Qual a taxa acumulada de decréscimo?

O preço inicial é denominado V_0, e V_2 é o preço dois anos depois.

Calculando, temos:

a) $V_2 = 25\,000(1 - 0,15)(1 - 0,10) = 19\,125$

Dois anos depois, o automóvel custou R$ 19 125,00.

b) $j_{ac} = \dfrac{19\,125}{25\,000} - 1 = -0,235 = -23,5\%$. Portanto, a taxa de decréscimo foi de 23,5%.

Poderíamos também encontrar a taxa acumulada de decréscimo pela fórmula:

$$j_{ac} = (1 - 0,15)(1 - 0,10) - 1 = -0,235 = -23,5\%$$

EXERCÍCIOS

87. O preço de um produto era R$ 50,00 e, dois meses depois, passou a R$ 52,00. Qual a variação percentual?

88. O PIB de um país era 500 bilhões de dólares e, dois anos depois, passou a 542 bilhões de dólares. Qual a taxa de crescimento no período?

89. A tabela ao lado fornece o número de automóveis de passeio produzidos no Brasil de 1998 a 2002.
Calcule a variação percentual da produção de cada ano em relação à do ano anterior.

Ano	Unidades produzidas
1998	1 220 825
1999	1 102 429
2000	1 365 919
2001	1 539 748
2002	1 593 788

Fonte: *Conjuntura Econômica*, julho de 2003.

90. A tabela ao lado fornece a produção de petróleo bruto no Brasil em 1981, 1991 e 2001.

Ano	Produção (barris/dia)
1981	213 000
1991	622 000
2001	1 351 000

Fonte: *Conjuntura Econômica*, julho de 2003.

a) Calcule a variação percentual da produção de 1991 em relação a 1981 e de 2001 em relação a 1991.
b) Calcule a média aritmética das duas variações percentuais citadas no item *a*.
c) Se entre 2001 e 2011 a variação percentual for igual à mesma média calculada no item *b*, qual será a produção em 2011?

91. A população de uma cidade cresceu 4% no período de um ano, passando a ser de 64 000 habitantes. Qual o número de habitantes antes do crescimento?

92. (UF-GO) Segundo dados da *Folha de S. Paulo* (30/8/2001, p. B2), o total de exportações feitas pelos gaúchos, de janeiro a julho de 2001, foi de 3,75 bilhões de dólares. Esse valor é 16,42% maior do que o total exportado por eles, de janeiro a julho de 2000.
Calcule o total exportado pelos gaúchos, nesse período de 2000.

93. O gráfico abaixo representa o número de habitantes do Brasil (em milhões de pessoas) desde 1900.

Fonte: *Folha de S. Paulo*, 30/9/2003.

a) Qual o crescimento percentual ocorrido entre 1960 e 1970?
b) Qual o crescimento percentual ocorrido entre 1991 e 2000?
c) Qual o crescimento percentual entre 1900 e 2000?
d) Entre quais anos sucessivos indicados no gráfico houve maior taxa de crescimento percentual?
e) Se entre 2000 e 2010 a taxa de crescimento for igual a 15%, qual a população em 2010?
f) Se entre 2000 e 2010 a taxa de crescimento for igual a 10%, qual a população em 2010?
g) Se entre 2000 e 2010 a taxa de crescimento for igual a 10% e entre 2010 e 2020 a taxa for de 8%, qual a população em 2020?

94. Uma dúzia de laranja que custava R$ 5,00 passou a custar R$ 4,00 três meses depois. Qual a taxa de decréscimo?

95. (UF-SC) Pedro investiu R$ 1 500,00 em ações. Após algum tempo, vendeu essas ações por R$ 2 100,00. Determine o percentual de aumento obtido em seu capital inicial.

96. Um produto que custava R$ 25,00 subiu 4% em um mês. Qual o preço após o aumento?

97. (UF-GO) Analise o seguinte texto e responda às perguntas abaixo.

> Pela primeira vez, o número de mulheres conectadas [à Internet] ultrapassou o de homens nos Estados Unidos. Elas representam [em maio de 2000] 50,4% dos internautas. [...] De maio de 1999 a maio de 2000, a presença delas aumentou 34,9%, enquanto o número [total] de usuários da internet cresceu 22,4%.
>
> (*Veja*, 23/8/2000.)

a) Qual era o percentual de mulheres entre os usuários da internet em maio de 1999?

b) No período considerado, de maio de 1999 a maio de 2000, qual foi o percentual de crescimento do número de usuários masculinos na internet?

98. Em janeiro, fevereiro e março o preço de um produto subiu 2%, 3% e 5%, respectivamente. Se antes dos aumentos o preço era R$ 36,00, qual o preço após os aumentos?

99. Em outubro, novembro e dezembro o preço de uma ação teve as seguintes variações percentuais: 4%, 8% e −5%. Qual o preço, após as variações, sabendo-se que antes o preço era R$ 28,00?

100. Se em cinco meses sucessivos o preço de um produto crescer a uma taxa de 1% ao mês, qual a taxa acumulada de variação percentual?

101. Se o PIB de um país crescer 4% ao ano durante dez anos, qual a taxa acumulada de crescimento percentual?

102. Se em quatro anos consecutivos o lucro de uma empresa decrescer a uma taxa de 3% ao ano, qual a taxa acumulada de decrescimento?

103. (UFF-RJ) Em 15 de julho de 2001, Miguel deverá pagar a taxa de condomínio acrescida, a partir desse mês, de uma cota extra. Após o primeiro pagamento, essa cota sofrerá, mensalmente, uma redução de 60%.

Determine o mês em que, na taxa de condomínio a ser paga por Miguel, a cota extra original estará reduzida em 93,6%.

104. (UF-PA) Ao entrar no período seco, o volume do reservatório de uma hidrelétrica é reduzido a 20% ao mês, em relação ao mês anterior.

a) Sendo o período seco de abril a novembro, qual a relação entre o volume no mês de março e o volume no final do período seco?

b) Se no início do período seco o reservatório apresenta 50% de sua capacidade, quando chegará a 20% de sua capacidade? (Use $\log 2 = 0{,}30$.)

105. (U. F. Viçosa-MG) Uma empresa concedeu aos seus funcionários um reajuste de 60% em duas etapas. Em agosto, 40% sobre o salário de julho e, em outubro, mais 20% sobre o salário de julho. Quanto este último reajuste representou em relação ao salário de setembro?

106. O salário de uma pessoa era R$ 2 800,00 e um ano depois passou a R$ 3 400,00. Passado mais um ano, o salário passou a ser R$ 3 800,00.

a) Qual a variação percentual do salário no 1º ano?

b) Qual a variação percentual do salário no 2º ano?

c) Qual a variação percentual acumulada nos dois anos?

107. Uma revendedora de automóveis resolveu baixar o preço de um automóvel em 5% em virtude da falta de compradores. Na semana seguinte, resolveu baixar mais 4%. Qual a redução acumulada de preço?

108. (UnB-DF) O crescimento anual das exportações de um país, em um determinado ano, é medido tendo-se por base o valor total das exportações do ano imediatamente anterior. Supondo que o crescimento das exportações de um país foi de 12% em 1996 e de 8% em 1997, julgue os itens abaixo.

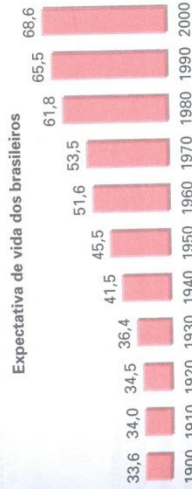
1) O valor total das exportações em 1996 foi igual a 1,2 vez o valor correspondente em 1995.

2) Diminuindo-se 8% do valor total das exportações ocorridas em 1997, obtém-se o valor total das exportações ocorridas em 1996.

3) Em 1997, o valor total das exportações foi 20% maior que o de 1995.

4) O crescimento do valor das exportações durante o biênio 1996−1997 equivale a um crescimento anual constante inferior a 10% ao ano, durante o mesmo período.

109. O gráfico abaixo representa a expectativa de vida (em anos) dos brasileiros de 1900 a 2000. Uma das razões para a baixa expectativa no início do século foi a alta taxa de mortalidade infantil reduzindo a vida média.

Fonte: *Folha de S. Paulo*, 30/9/2003.

a) Qual a variação percentual da expectativa de vida entre 1940 e 1950?

b) Qual a variação percentual da expectativa de vida entre 1990 e 2000?

c) Entre quais anos sucessivos do gráfico houve a maior variação percentual na expectativa de vida?

d) Se entre 2000 e 2010 a expectativa de vida crescer 5%, qual a expectativa de vida em 2010?

e) Se entre 2000 e 2010 a expectativa de vida crescer 5% e entre 2010 e 2020 crescer 4%, qual a expectativa de vida em 2020?

110. (UFF-RJ) Um jovem recebe mesada dos pais e gasta 45% com transporte, 25% com lazer e 30% com lanches. A despesa com transporte aumentou 10%, porém, o valor total da mesada foi mantido.
Determine o percentual que ele precisa reduzir da quantia destinada ao lazer para fazer frente a esse aumento, sem alterar sua despesa com lanches.

V. Taxas de inflação

8. *Inflação*

O fenômeno do aumento persistente e generalizado dos preços de bens e de serviços, com conseqüente perda do poder aquisitivo da moeda, denomina-se *inflação*.

Os governos geralmente colocam como meta o combate à inflação, pois ela acarreta grandes distorções numa economia de mercado, tais como: perda do poder aquisitivo dos salários que não sofrerem reajustes no seu vencimento, perda do poder aquisitivo daqueles que recebem rendas fixas como o aluguel, desorganização do mercado de capitais e aumento da procura por ativos reais (como, por exemplo, casas e terrenos), dificuldades do financiamento do setor público (o governo encontra dificuldades para vender seus títulos), etc.

9. *Deflação*

Entende-se por *deflação* o fenômeno da queda persistente dos preços de bens e de serviços. A deflação acarreta problemas como a queda do investimento com conseqüente queda da produção e aumento do desemprego; e também pode levar o país a uma depressão como a que houve nos Estados Unidos no período compreendido entre 1929 e 1933. Geralmente, o combate à deflação é feito com o aumento dos gastos públicos.

Usualmente, a inflação é medida segundo a composição de uma *cesta básica* de produtos com quantidades físicas bem determinadas. Em seguida, mês a mês, os preços desses produtos são coletados e então, com base nos preços médios de cada produto, obtém-se o valor da cesta básica. A *taxa de inflação* mensal é a variação percentual do valor da cesta básica calculada entre um mês e o mês anterior.

Admitamos, por exemplo, que uma cesta básica seja constituída de apenas dois produtos *A* e *B*, com duas unidades de *A* e uma de *B*. Suponhamos que em janeiro de certo ano os preços médios por unidade de *A* e *B* sejam, respectivamente, R$ 80,00 e R$ 40,00. Assim, o valor da cesta básica em janeiro é $V_{jan} = 2 \cdot (80) + 1 \cdot (40) = 200$. Suponhamos, também, que em fevereiro do mesmo ano os preços médios de *A* e *B* passem a valer R$ 81,00 e R$ 42,00, respectivamente. O valor da cesta básica, em fevereiro, será $V_{fev} = 2 \cdot (81) + 1 \cdot (42) = 204$. A taxa de inflação de fevereiro (indicada por j_{fev}) será dada por:

$$j_{fev} = \frac{204}{200} - 1 = 0{,}02 = 2\%$$

Se em março os preços de *A* e *B* forem R$ 82,00 e R$ 43,00, respectivamente, o valor da cesta básica, no mês de março, será $V_{mar} = 2 \cdot (82) + 1 \cdot (43) = 207$. A taxa de inflação de março (indicada por j_{mar}) será dada por:

$$j_{mar} = \frac{207}{204} - 1 = 0{,}0147 = 1{,}47\%$$

No caso de taxas mensais de inflação $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ de meses sucessivos, a taxa acumulada de inflação nesses meses, de acordo com o que foi visto em Variação percentual, é dada por:

$$j_{ac} = (1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3) \ldots (1 + j_n) - 1$$

Observações

1ª) O exemplo dado foi elaborado considerando-se uma cesta básica com apenas dois produtos. No entanto, a mesma idéia pode ser facilmente generalizada para uma cesta básica com um número qualquer de produtos. Em geral, essas quantidades são determinadas por meio de pesquisas de orçamentos familiares.

2ª) A definição da taxa de inflação, de acordo com o que vimos, é baseada no chamado *método de Laspeyres* (Étienne Laspeyres, 1834-1913, economista e estatístico alemão) com quantidades fixas na época base, sendo um dos mais utilizados na prática. Existem, entretanto, outras metodologias.

3ª) Existem muitos índices oficiais de inflação, cada qual caracterizado pelos produtos da cesta básica, pela metodologia de cálculo ou pelo período e local de coleta de preços. Entre eles destacamos os *Índices de Preços ao Consumidor* (IPCs), cujas cestas básicas contêm produtos de consumo final, e são calculadas por diversas instituições nas grandes cidades, o *Índice de Preços no Atacado* (IPA), calculado pela Fundação Getúlio Vargas, com preços negociados no atacado e com dados coletados em todo o país, o *Índice Nacional do Custo da Construção* (INCC), que envolve preços de produtos e serviços da construção civil, com dados coletados em todo o país pela Fundação Getúlio Vargas, e o *Índice Geral de Preços* (IGP), calculado pela Fundação Getúlio Vargas, utilizando uma média ponderada do IPA, do IPC do Rio de Janeiro e São Paulo e do INCC, que representam 60%, 30% e 10%, respectivamente, do IGP.

Exemplos

1º) Em janeiro, fevereiro e março as taxas de inflação foram 1%, 1,5% e 2%, respectivamente. Qual a taxa acumulada no trimestre?

Calculando, temos:

$$j_{ac} = (1 + 0,01)(1 + 0,015)(1 + 0,02) - 1 = 0,0457 = 4,57\%$$

A taxa acumulada no trimestre é 4,57%.

2º) Uma taxa mensal de inflação de 1% acumula que taxa em 10 meses?

Temos:

$$j_{ac} = (1,01)(1,01)(1,01) \dots (1,01) - 1$$
$$j_{ac} = (1,01)^{10} - 1 = 0,1046 = 10,46\%$$

Assim, em 10 meses haverá um acúmulo de taxa de 10,46%.

3º) Que taxa mensal constante de inflação deverá vigorar em cada um dos próximos 12 meses para acumular uma taxa de 20%?

Seja j a taxa procurada:

$$(1 + j)^{12} - 1 = 0,20$$

Portanto:

$$(1 + j)^{12} = 1,20$$
$$\left[(1 + j)^{12}\right]^{\frac{1}{12}} = [1,20]^{\frac{1}{12}}$$
$$(1 + j)^{1} = (1,20)^{0,0833}$$
$$1 + j = 1,0153$$
$$j = 0,0153 = 1,53\%$$

A taxa mensal deve ser 1,53%.

4º) Num período em que a inflação é de 20%, qual a perda do poder aquisitivo da moeda?

Consideremos um valor arbitrário da moeda, por exemplo, R$ 1 000,00.

Suponhamos que, no início do período, o valor da cesta básica seja R$ 100,00 (valor arbitrário).

O poder aquisitivo de R$ 1 000,00 equivale a quanto esse valor consegue comprar de um produto (no caso, a cesta básica). O poder aquisitivo de R$ 1 000,00 é 1 000 : 100 = 10 cestas básicas.

No final do período, o valor da cesta básica é R$ 120,00, pois a inflação é de 20% e o valor de R$ 1 000,00 comprará 1 000 : 120 = 8,3333 cestas básicas.

A variação percentual do poder aquisitivo é $\frac{8,3333}{10} - 1 = -16,67\%$. Portanto, a moeda teve uma perda de poder aquisitivo igual a 16,67%.

EXERCÍCIOS

111. Uma cesta básica é constituída de três produtos X, Y e Z nas quantidades 3, 5 e 12, respectivamente. Em janeiro, fevereiro e março os preços médios por unidade desses produtos são dados ao lado.

	X	Y	Z
Janeiro	10,00	12,00	15,00
Fevereiro	10,00	12,50	15,60
Março	11,00	12,60	15,40

a) Qual a taxa de inflação de fevereiro, considerando-se essa cesta básica?
b) Qual a taxa de inflação de março, considerando-se a mesma cesta básica?

112. A tabela abaixo fornece os preços de uma cesta básica de janeiro a julho de certo ano.

Mês	Preço da cesta básica
Janeiro	240
Fevereiro	246
Março	250
Abril	x
Maio	259
Junho	264
Julho	270

a) Qual a taxa de inflação de fevereiro, março, junho e julho?
b) Qual o valor de x para que a taxa de inflação de abril seja 1,5%?
c) Qual o valor de x para que a taxa de inflação de maio seja 1%?

113. (FGV-SP) Uma dona de casa compra mensalmente 3 produtos A, B e C nas quantidades (em unidades) dadas pela tabela abaixo.

Produto	Quantidades
A	2
B	3
C	5

Em janeiro, os preços por unidade de A, B e C foram, respectivamente, 10, 12 e 20. Em fevereiro, tais preços foram, respectivamente, 10, 14 e 21.

a) Quais os aumentos percentuais de preços de cada produto, de fevereiro em relação a janeiro?
b) Qual o aumento da despesa da dona de casa com esses produtos de fevereiro em relação a janeiro?

114. Em julho, agosto e setembro as taxas de inflação foram, respectivamente, 1,2%, 0,8% e 1,3%.

a) Qual a taxa acumulada de inflação no período?
b) Qual deverá ser a taxa de inflação de outubro para que a taxa acumulada do quadrimestre seja 4%?

115. A taxa de inflação acumulada em um bimestre foi de 5%. No 1º mês a taxa foi de 2%. Qual a taxa do 2º mês?

116. Em janeiro, a taxa de inflação foi de 2%, em fevereiro, 1,5% e em março houve uma deflação de 1%.

a) Qual a taxa acumulada no trimestre?
b) Qual deverá ser a taxa de abril para que a taxa acumulada no quadrimestre seja 4,5%?

117. Uma taxa mensal de inflação de 1,5% acumula que taxa em 12 meses?

118. Uma taxa de inflação de 0,7% ao mês acumula que taxa em 24 meses?

119. (PUC-RJ) Suponha uma inflação mensal de 4% durante um ano. De quanto será a inflação acumulada nesse ano?

120. Uma taxa mensal de deflação de 1% acumula que taxa em 6 meses?

121. Qual taxa mensal constante de inflação acumula 8% em 5 meses?

122. Qual taxa mensal constante de inflação acumula 25% em 1 ano?

123. Durante o ano de 1923, no auge da hiperinflação na Alemanha, a taxa de inflação foi de $(855{,}44 \cdot 10^8)\%$. Se em cada um dos 12 meses a taxa fosse constante, qual seria seu valor? (Dados extraídos de: W. A. Bomberger e outros. *Hiperinflação*: algumas experiências. São Paulo: Ed. Paz e Terra.)

124. Em 1990, no auge da inflação brasileira, o Índice Geral de Preços (IGP) acusou uma variação de 2 740,23%. (Dados extraídos de: Revista *Conjuntura Econômica*, julho de 2003.)

Se em cada mês de 1990 a taxa de inflação fosse constante, qual o valor dessa taxa?

125. Num período em que a taxa de inflação é de 40%, qual a perda do poder aquisitivo da moeda?

126. Num período em que a taxa de inflação é de 100%, qual a perda do poder aquisitivo da moeda?

127. (Vunesp-SP) No início de um mês, João poderia comprar M kg de feijão, se gastasse todo seu salário nessa compra. Durante o mês, o preço do feijão aumentou 30% e o salário de João aumentou 10%. No início do mês seguinte, se gastasse todo seu salário nessa compra, João só poderia comprar X% dos M kg de feijão. Calcule X.

CAPÍTULO II

Matemática Financeira

I. Capital, juros, taxa de juros e montante

Fundamentalmente, a Matemática Financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimentos em geral.

Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário, durante um certo tempo, essa quantia é chamada de *capital* (ou *principal*) e é indicada por C. O valor que o emprestador cobra pelo uso do dinheiro, ou o valor pago pelo tomador do empréstimo é chamado de *juros* e indicado por J.

A *taxa de juros*, indicada por i (do inglês *interest*, que significa juros), é expressa como porcentagem do capital. Ela representa os juros numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.), etc. Assim, por exemplo, se o capital emprestado for R$ 8 000,00 e a taxa, 1,5% ao mês, os juros pagos no mês serão iguais a 1,5% sobre R$ 8 000,00, que equivale a $0{,}015 \cdot (8\,000)$ e, portanto, igual a R$ 120,00. De modo geral, os juros no período são iguais ao produto do capital pela taxa, isto é:

$$\boxed{J = C \cdot i} \quad \text{(juros no período da taxa)}$$

Se o pagamento do empréstimo for feito numa única parcela, ao final do prazo do empréstimo, o tomador pagará a soma do capital emprestado com o juro, que chamaremos de *montante* e indicaremos por M.

No caso do empréstimo de R$ 8 000,00, durante 1 mês, à taxa de 1,5% ao mês, o montante será igual a R$ 8 120,00. De modo geral, teremos:

$$\boxed{M = C + J}$$

As operações de empréstimo são feitas geralmente por intermédio de um banco que, de um lado, capta dinheiro de interessados em aplicar seus recursos e, de outro, empresta esse dinheiro aos tomadores interessados no empréstimo. A captação é feita sob várias formas, como, por exemplo, cadernetas de poupança e certificados de depósito bancário (cada aplicação recebe uma taxa de acordo com o prazo e os riscos envolvidos). Os tomadores também podem obter financiamento sob diversas maneiras, e as taxas cobradas dependem do prazo do empréstimo, dos custos do capital para o banco e do risco de não-pagamento por parte do tomador.

Exemplos

1º) Um capital de R$ 12 000,00 foi aplicado durante 3 meses à taxa de 5% a.t. (ao trimestre). Vamos calcular os juros e o montante recebidos após 3 meses.
Em reais, após 3 meses, os juros recebidos foram:

$$J = 12\,000 \cdot (0{,}05) = 600$$

Assim, o montante recebido, em reais, foi:

$$M = 12\,000 + 600 = 12\,600$$

2º) Uma empresa recebeu um empréstimo bancário de R$ 60 000,00 por 1 ano, pagando um montante de R$ 84 000,00. Vamos obter a taxa anual de juros.
Os juros do empréstimo, em reais, são:

$$84\,000 - 60\,000 = 24\,000$$

Como $J = C \cdot i$, segue que $i = \dfrac{J}{C} = \dfrac{24\,000}{60\,000} = 0{,}40 = 40\%$ a.a. (ao ano), que corresponde à taxa anual de juros.

3º) Um investidor aplicou R$ 30 000,00 numa caderneta de poupança e R$ 20 000,00 num fundo de investimento, pelo prazo de 1 ano. A caderneta de poupança rendeu no período 9% e o fundo, 12%. Vamos calcular a taxa global de juros recebidos pelo investidor.
Chamamos de J_1 os juros da caderneta de poupança, e de J_2, os do fundo de investimento. Assim, temos, em reais:

$$J_1 = 30\,000 \cdot (0{,}09) = 2\,700 \text{ e } J_2 = 20\,000 \cdot (0{,}12) = 2\,400$$

Calculando os juros totais recebidos, temos:

$$J = 2\,700 + 2\,400 = 5\,100$$

Assim, a taxa global de juros recebidos é:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{5\,100}{50\,000} = 0{,}1020 = 10{,}20\% \text{ a.a.}$$

4º) Um investidor aplicou 80% de seu capital num fundo *A* e o restante num fundo *B*, pelo prazo de 1 ano. Nesse período, o fundo *A* rendeu 16%, enquanto o fundo *B* rendeu 10%. Vamos determinar a taxa global de juros ao ano recebida pelo investidor.

Seja *C* o capital total aplicado, a parte aplicada no fundo *A* é $C_A = 0{,}80 \cdot C$ e a parte aplicada no fundo *B* é $C_B = 0{,}20 \cdot C$.

Os juros recebidos por meio do fundo *A* foram:

$$J_A = 0{,}16 \cdot C_A = 0{,}16 \cdot (0{,}80C) = 0{,}128C$$

Os juros recebidos por meio do fundo *B* foram:

$$J_B = 0{,}10 \cdot C_B = 0{,}10 \cdot (0{,}20C) = 0{,}02C$$

Assim, os juros totais recebidos foram:

$$J_A + J_B = 0{,}128C + 0{,}02C = 0{,}148C$$

Finalmente, a taxa global de juros recebida na aplicação foi:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{0{,}148C}{C} = 0{,}148 = 14{,}8\% \text{ a.a.}$$

EXERCÍCIOS

128. Um capital de R$ 4 000,00 foi aplicado durante 2 meses à taxa de 3% a.b. (ao bimestre). Calcule os juros e o montante recebido.

129. Osvaldo aplicou R$ 15 000,00 durante 6 meses num fundo que rendeu 10% a.s. (ao semestre). Qual o montante recebido?

130. Olavo aplicou R$ 25 000,00 numa caderneta de poupança pelo prazo de 1 ano. Sabendo-se que a taxa era de 9% a.a., qual o valor do montante?

131. Sueli aplicou R$ 4 800,00 num fundo de investimento e recebeu, 3 meses depois, R$ 500,00 de juros. Qual a taxa trimestral de juros da aplicação?

132. Uma empresa tomou um empréstimo de R$ 100 000,00 por 1 dia à taxa de 0,2% a.d. (ao dia). Qual o valor do montante pago?

133. Roberto aplicou R$ 12 000,00 num fundo e recebeu, 1 ano depois, um montante de R$ 17 000,00. Qual a taxa anual de juros recebida?

134. Em um empréstimo de R$ 50 000,00 feito por 1 mês, uma empresa pagou um montante de R$ 51 200,00. Qual a taxa mensal do empréstimo?

135. Um investidor dobrou seu capital numa aplicação pelo prazo de 2 anos. Qual a taxa de juros no período da operação?

136. (Vunesp-SP) O preço de tabela de um determinado produto é R$ 1 000,00. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor desembolsado no pagamento à vista possa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias, com um rendimento de 3%, determine:

a) quanto o comprador teria ao final da aplicação;

b) qual a opção mais vantajosa para o comprador: pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias. Justifique matematicamente sua resposta.

137. (FGV-SP) Um investidor norte-americano traz para o Brasil 50 000 dólares; faz a conversão de dólares para reais; aplica os reais por um ano à taxa de 18% ao ano, e no resgate converte os reais recebidos para dólares e os envia para os Estados Unidos. No dia da aplicação, um dólar valia R$ 1,10 e, um ano depois, na data do resgate, um dólar valia R$ 1,20.

a) Qual a taxa de rendimento dessa aplicação, considerando os valores expressos em dólares?

b) Quanto deveria valer um dólar na data de resgate (um ano após a aplicação) para que a taxa de rendimento em dólares tivesse sido de 12% ao ano?

138. Pedro aplicou R$ 25 000,00 num fundo *A* e R$ 45 000,00 num fundo *B* pelo prazo de 3 meses. Nesse período, o fundo *A* rendeu 15% e o *B* rendeu 12%. Qual a taxa global de rendimento no trimestre?

139. Jair aplicou 60% de seu capital na caderneta de poupança e o restante num fundo de investimento, pelo prazo de 6 meses. Nesse período, a caderneta de poupança rendeu 5% e o fundo, 8%. Qual a taxa global de rendimento auferido por Jair nesse período?

140. José Roberto aplicou 30% de seu capital num fundo *A*, 30% num fundo *B* e o restante num fundo *C*, pelo prazo de 8 meses. Nesse período, o fundo *A* rendeu 8%, o fundo *B*, 12% e o *C*, 6%. Qual a taxa global de rendimento obtida pelo investidor?

141. (FGV-SP) O sr. Matias tem R$ 12 000,00 para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende investir parte numa aplicação *A* que tem um rendimento esperado de 15% ao ano sobre o valor investido, e parte numa outra aplicação *B* que dá um rendimento esperado de 20% sobre o valor investido.

a) Qual o rendimento anual esperado, se ele aplicar R$ 7 000,00 em *A* e R$ 5 000,00 em *B*?

b) Qual o máximo que deve investir em *A* para auferir um ganho esperado de, no mínimo, R$ 2 200,00 daqui a um ano?

142. (UnB-DF) Uma pessoa investiu certo capital, por um período de 5 anos, da seguinte maneira: com $\frac{2}{5}$ do capital comprou ações da bolsa de valores; do restante, aplicou metade em imóveis e metade em caderneta de poupança. Ao final de 5 anos, ela contabilizou um prejuízo de 2% na aplicação em ações, um ganho de 20% na aplicação imobiliária e um ganho de 26% na aplicação em poupança. Calcule, em relação ao capital inicial, o percentual ganho pelo investidor, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

II. Regimes de capitalização

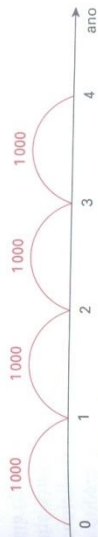
Se um capital for aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de *regimes de capitalização*: *capitalização simples* (ou juros simples) e *capitalização composta* (ou juros compostos).

10. Regime de capitalização simples

De acordo com esse regime, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa. Os juros são pagos somente no final da aplicação.

Exemplo

Um capital de R$ 5 000,00 é aplicado a juros simples durante 4 anos à taxa de 20% a.a. Vamos calcular os juros gerados em cada período e o montante após o período de aplicação.

Os juros gerados no 1º ano são 5 000 · (0,20) = 1 000.
Os juros gerados no 2º ano são 5 000 · (0,20) = 1 000.
Os juros gerados no 3º ano são 5 000 · (0,20) = 1 000.
Os juros gerados no 4º ano são 5 000 · (0,20) = 1 000.

No cálculo dos juros de cada ano, a taxa incide apenas sobre o capital inicial. Assim, o montante após 4 anos vale R$ 9 000,00.

11. Regime de capitalização composta

Nesse regime, os juros do 1º período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital, gerando o montante M_1 após 1 período.

Os juros do 2º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_1; esses juros são adicionados a M_1, gerando o montante M_2 após 2 períodos.

Os juros do 3º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_2; esses juros são adicionados a M_2, gerando o montante M_3 após 3 períodos.

Dessa forma, os juros em cada período são iguais ao montante do início do período multiplicado pela taxa, e esses juros são adicionados ao montante do início do período, gerando o montante do final do período.

Exemplo

Um capital de R$ 5 000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 anos à taxa de 20% a.a. Vamos calcular os juros e o montante para cada período.

Os juros do 1º ano são 5 000 · (0,20) = 1 000, e o montante após 1 ano é M_1 = 6 000.

Os juros do 2º ano são 6 000 · (0,20) = 1 200, e o montante após 2 anos é M_2 = 7 200.

Os juros do 3º ano são 7 200 · (0,20) = 1 440, e o montante após 3 anos é M_3 = 8 640.

Os juros do 4º ano são 8 640 · (0,20) = 1 728, e o montante após 4 anos é M_4 = 10 368.

No Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado em operações tradicionais, embora haja também a utilização dos juros simples. Entretanto, quando a operação não tiver uma prática tradicional (ou seja, operações consagradas, tais como cheque especial, crédito direto ao consumidor, desconto de títulos, etc.), o que prevalece é o regime acordado entre o tomador e o emprestador.

EXERCÍCIOS

143. Um capital de R$ 4 000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m. Calcule o montante para os seguintes prazos de aplicação:

a) 2 meses b) 3 meses c) 6 meses

144. Qual o montante de uma aplicação de R$ 12 000,00 a juros simples, à taxa de 18% a.a., durante 5 anos?

145. Um capital de R$ 4 000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Calcule o montante para os seguintes prazos de aplicação:

a) 2 meses b) 3 meses c) 4 meses

146. Qual o montante de uma aplicação de R$ 7 000,00 a juros compostos durante 4 anos, à taxa de 15% a.a.?

147. (Unicamp-SP) Uma pessoa investiu R$ 3 000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

a) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?

b) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?

148. (UF-MG) Um televisor estava anunciado por R$ 500,00 para pagamento à vista ou em três prestações mensais de R$ 185,00 cada uma; a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os R$ 500,00 numa caderneta de poupança, que lhe renderia 2% ao mês nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida, fazendo retiradas de R$ 185,00 daquela caderneta nas datas de vencimento de cada prestação. Mostre que a opção de Paulo não foi boa, calculando quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.

149. (UF-SC, adaptado) Classifique como verdadeira ou falsa a proposição abaixo:
Se uma loja vende um artigo à vista por R$ 54,00, ou por R$ 20,00 de entrada e mais dois pagamentos mensais de R$ 20,00, então a loja está cobrando mais do que 10% ao mês sobre o saldo que tem a receber.

III. Juros simples

Consideremos um capital C aplicado a juros simples, a uma taxa i por período e durante n períodos de tempo. Os juros no 1º período são iguais a $C \cdot i$ e, de acordo com a definição de capitalização simples, em cada um dos períodos os juros são iguais a $C \cdot i$, conforme mostra a figura.

C · i C · i C · i ... C · i
0 1 2 3 ... n

Assim, os juros simples da aplicação serão iguais à soma de n parcelas iguais a $C \cdot i$, ou seja:

$$J = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i$$

E, portanto:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Os juros simples são resultados do produto do capital pela taxa e pelo prazo da aplicação. Observemos que nessa fórmula o prazo n deve estar expresso na mesma unidade de i, isto é, se a taxa i for definida em meses, o prazo n virá também em meses. Além disso, embora a fórmula tenha sido deduzida para n inteiro, ela é estendida também para qualquer prazo fracionário, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ano, $\frac{5}{12}$ de ano.

Exemplos

1º) Um capital de R$ 8 000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 5 meses. Vamos calcular os juros e o montante da aplicação.

Os juros da aplicação, em reais, são:

$$J = 8\,000 \cdot (0{,}02) \cdot 5 = 800$$

O montante da aplicação, em reais, é:

$$M = 8\,000 + 800 = 8\,800$$

2º) Vamos obter o montante de uma aplicação de R$ 5 000,00 a juros simples e à taxa de 3% a.m., durante 2 anos.

Seja $C = 5\,000$, $i = 3\%$ a.m. e $n = 24$ meses.

Para calcular os juros simples, temos:

$$J = 5\,000 \cdot (0{,}03) \cdot 24 = 3\,600$$

E, conseqüentemente, o montante é dado por:

$$M = 5\,000 + 3\,600 = 8\,600$$

Assim, o valor do montante é R$ 8 600,00.

3º) Vamos determinar o capital que aplicado a juros simples, à taxa de 1,5% a.m., durante 6 meses resulta em um montante de R$ 14 000,00.

Seja C o capital procurado, temos:

$$C + J = 14\,000$$

Portanto:

$$C + C \cdot (0{,}015) \cdot 6 = 14\,000$$

$$1{,}09 \cdot C = 14\,000$$

$$C = \frac{14\,000}{1{,}09} = 12\,844{,}04$$

Assim, o capital aplicado a juros simples é R$ 12 844,04.

4º) Uma geladeira é vendida à vista por R$ 1 200,00 ou a prazo com 20% de entrada mais uma parcela de R$ 1 100,00, após 3 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

Para calcularmos a taxa de juros simples, precisamos determinar:

- a entrada: R$ 240,00 (20% de 1 200);
- o capital financiado: R$ 960,00 (1 200 − 240);
- o montante do capital financiado: R$ 1 100,00;
- o juro do financiamento: R$ 140,00 (1 100 − 960).

Assim, chamando de i a taxa mensal de juros, podemos escrever:

$$140 = 960 \cdot i \cdot 3 \Rightarrow 140 = 2\,880 \cdot i \Rightarrow i = \frac{140}{2\,880} = 0{,}0486 = 4{,}86\% \text{ a.m.}$$

5º) Um capital de R$ 12 000,00 é aplicado a juros simples durante 72 dias. Qual o valor dos juros simples nos seguintes casos:

a) taxa de 3% a.m. b) taxa de 45% a.a.

Em situações como essa (quando o prazo da operação é dado em dias), costuma-se utilizar o calendário comercial para efeito do cálculo dos juros. De acordo com essa convenção, todos os meses são considerados com 30 dias e o ano é considerado com 360 dias. Dessa forma, temos:

a) $n = \frac{72}{30} = 2{,}4$ meses e, conseqüentemente,

$$J = 12\,000 \cdot (0{,}03) \cdot 2{,}4 = 864$$

b) $n = \frac{72}{360} = 0{,}2$ ano e, conseqüentemente,

$$J = 12\,000 \cdot (0{,}45) \cdot 0{,}2 = 1\,080$$

EXERCÍCIOS

150. Obtenha os juros simples recebidos nas seguintes aplicações:

	Capital	Taxa	Prazo
a)	5 000	2,5% a.m.	8 meses
b)	4 000	4% a.t.	1 ano e meio
c)	7 000	1,7% a.m.	1 ano e meio

151. Um capital de R$ 20 000,00 é aplicado a juros simples, durante 2 anos, à taxa de 2% a.m. Qual o montante obtido?

152. Qual o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 8 meses, resulta em um montante de R$ 6 000,00?

153. Determine o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% a.m., durante 2 anos, resulta em um montante de R$ 16 000,00.

154. Calcule o capital que, aplicado a juros simples, durante 11 meses, e à taxa de 1,5% a.m., proporciona juros de R$ 700,00.

155. O banco RST empresta R$ 2 000 000,00 a uma firma pelo prazo de 120 dias, cobrando juros simples à taxa de 3% a.m. Simultaneamente, ele paga aos aplicadores dessa quantia juros simples com prazo de 120 dias, à taxa de 2% a.m.

a) Qual a diferença entre os juros recebidos e os pagos após os 120 dias?

b) Qual o valor dos juros pagos aos aplicadores?

156. Roberto pretende comprar um carro usado cujo preço é R$ 12 000,00 para pagamento daqui a 4 meses. Se ele conseguir aplicar seu dinheiro a juros simples e à taxa de 2% a.m.:

a) Quanto deverá aplicar no ato da compra para fazer frente ao pagamento?

b) Se o preço para pagamento à vista for R$ 11 200,00, é melhor ele pagar à vista ou a prazo?

157. O sr. Macedo quer dividir seu capital de R$ 30 000,00 em duas partes, uma para ser aplicada no banco *A*, que paga juros simples à taxa de 1,8% a.m., e a outra no banco *B*, que também paga juros simples à taxa de 2,2% a.m. A aplicação no banco *A* é por 2 anos e no *B*, por 1 ano e meio. Calcule o valor aplicado em cada banco de modo que os juros sejam iguais.

158. Uma televisão é vendida à vista por R$ 1 800,00 ou então com R$ 400,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1 500,00 após 2 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

159. Uma máquina de lavar roupa é vendida à vista por R$ 1 500,00 ou então com 30% de entrada mais uma parcela de R$ 1 200,00 após 3 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

160. (Ibmec-SP, adaptado) Classifique a sentença abaixo como verdadeira ou falsa:

Um televisor é vendido à vista por R$ 1 000,00 ou a prazo com 10% de entrada e mais uma parcela de R$ 1 080,00 após 4 meses. Logo, a taxa mensal de juros simples do financiamento é 4,5%.

161. (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R$ 200,00 mais uma parcela de R$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo-se que o preço à vista do aparelho é R$ 600,00:

a) qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

b) após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 450,00 para que a taxa de juros simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês?

162. (U. F. Juiz de Fora-MG, adaptado) O preço à vista de uma mercadoria é R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, qual a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?

163. Um aparelho de som é vendido por R$ 1 200,00 para pagamento dentro de 3 meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 9% sobre o preço de R$ 1 200,00. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada na compra a prazo?

164. Resolva o exercício anterior considerando um desconto de 5% sobre o preço de R$ 1 200,00.

165. Um banco concedeu a uma empresa um empréstimo a juros simples por 15 meses. Qual a taxa mensal do empréstimo sabendo-se que o montante é igual a 160% do capital emprestado?

166. Durante quanto tempo um capital de R$ 25 000,00 deve ser aplicado a juros simples e à taxa de 2% a.m. para se obter um montante de R$ 30 000,00?

167. Um capital aplicado a juros simples e à taxa de 8% a.a. triplica em que prazo?

168. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 8 000,00 a juros simples, durante 96 dias, à taxa de:

a) 3% a.m. b) 54% a.a. c) 24% a.t.

169. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 200 000,00 a juros simples, durante 1 dia, à taxa de 30% a.a.

170. Qual o montante de uma aplicação de R$ 200 000,00 a juros simples, durante 1 dia, à taxa de 4% a.m.?

171. Uma aplicação financeira de R$ 2 500,00 a juros simples gerou, 6 meses depois, um montante de R$ 2 920,00. Qual a taxa anual da aplicação?

172. Uma aplicação financeira de R$ 8 000,00 gerou, após 142 dias, um montante de R$ 10 000,00. Qual a taxa mensal de juros simples da aplicação?

173. A que taxa anual um capital de R$ 4 500,00 deve ser aplicado, a juros simples, para render juros de R$ 300,00 no prazo de 3 meses e 12 dias?

174. A que taxa anual um capital deve ser aplicado, a juros simples, para triplicar num prazo de 72 dias?

175. Renata pretende comprar um aparelho de som cujo preço é R$ 1 200,00 para pagamento dentro de 100 dias. Se ela conseguir aplicar seu dinheiro a juros simples e à taxa de 1,8% a.m.:

a) Quanto deverá aplicar no ato da compra para fazer frente ao pagamento?

b) Se o preço para pagamento à vista for de R$ 1 050,00, é melhor ela pagar à vista ou a prazo?

IV. Descontos simples

Quando um comprador efetua uma compra de muitas unidades de um produto, é comum que ele peça um abatimento no preço por unidade. Esse abatimento é chamado *desconto*. O pedido de desconto ocorre

também quando o comprador, tendo um prazo para o pagamento de um produto, propõe o pagamento à vista, desde que haja abatimento no preço. O pedido de desconto também pode ocorrer quando o comprador tenta pagar menos por algum produto ou serviço.

Existe ainda o conceito de *desconto de títulos*, muito empregado por empresas. Suponhamos que uma empresa faça uma venda de R$ 15 000,00 para outra empresa, concedendo um prazo de 2 meses para o pagamento. Nesse caso, o vendedor emite um documento chamado *duplicata*, que lhe dará o direito de cobrar o valor de R$ 15 000,00 do comprador dentro de 2 meses.

Caso o vendedor necessite do dinheiro antes do vencimento da duplicata, ele pode ir a um banco e efetuar o desconto da duplicata. O procedimento consiste em a empresa ceder o direito do recebimento da duplicata para o banco, em troca recebendo do banco um valor menor que o valor da duplicata. Digamos, por exemplo, que a duplicata de R$ 15 000,00 seja descontada 1 mês antes do vencimento e que a empresa receba do banco R$ 14 800,00 nessa data. Assim, em troca de um adiantamento de R$ 14 800,00, o banco fica com o direito de receber a duplicata de R$ 15 000,00 um mês depois. A diferença entre R$ 15 000,00 e o valor de R$ 14 800,00 adiantado pelo banco é chamada de *desconto da duplicata*.

De modo análogo, os bancos descontam *cheques pré-datados* e *notas promissórias* (estas são papéis que representam uma promessa de pagamento ao credor, feita pelo devedor).

Chamemos de N o valor do título a ser descontado, d a taxa de desconto utilizada pelo banco e n o prazo de antecipação do vencimento do título. O *desconto bancário* (ou *comercial*), indicado por D, é definido por:

$$D = N \cdot d \cdot n$$

em que o prazo n deve estar expresso na mesma unidade da taxa de desconto d.

A diferença $N - D$, que a empresa recebe antecipadamente, recebe o nome de *valor descontado* (ou *valor líquido*) do título e é indicada por V_d.

Exemplos

1º) Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R$ 12 000,00, três meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3% a.m. Vamos calcular a taxa de juros simples efetivamente cobrada pelo banco.

O desconto é dado por $D = 12\,000 \cdot (0{,}03) \cdot 3 = 1\,080$.

Calculando o valor descontado (ou líquido) recebido pela empresa, temos, em reais:

$$V_d = 12\,000 - 1\,080 = 10\,920$$

Para o banco, o valor de R$ 10 920,00 adiantado para a empresa é o capital, e o valor de R$ 12 000,00, a ser recebido dentro de 3 meses, é o montante. Assim, os juros recebidos pelo banco totalizam R$ 1 080,00.

A taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco é dada pela fórmula $J = C \cdot i \cdot n$, ou seja, $1\,080 = 10\,920 \cdot i \cdot 3$.

Portanto, a taxa de juros simples cobrada pelo banco é $i = 3{,}30\%$ a.m.

Observemos que a diferença entre a taxa de desconto (d) e a taxa de juros (i) decorre do fato de a primeira incidir sobre o valor final (R$ 12 000,00), enquanto a segunda incide sobre o valor inicial (R$ 10 920,00).

2º) Um banco cobra em suas operações de desconto de duplicatas, com prazo de antecipação de 2 meses, uma taxa de desconto comercial de 2,5% a.m. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?

Como o valor da duplicata não foi informado, admitamos, por exemplo, um valor igual a R$ 100,00.

Assim, o desconto vale, em reais:

$$D = 100 \cdot (0{,}025) \cdot 2 = 5$$

e o valor descontado é igual a R$ 95,00.

Em resumo, o banco emprestou R$ 95,00 (capital) para receber um montante igual a R$ 100,00. Os juros cobrados somaram R$ 5,00.

Pela fórmula dos juros simples, temos, então:

$$5 = 95 \cdot i \cdot 2 \Rightarrow i = 0{,}0263 = 2{,}63\% \text{ a.m.}$$

Observemos que, atribuindo à duplicata qualquer outro valor, encontramos a mesma resposta. Genericamente, podemos chamar de N o valor da duplicata.

3º) Um pequeno comerciante leva a um banco o seguinte conjunto de cheques pré-datados para serem descontados à taxa de desconto de 2,8% a.m.

Cheque	Valor	Prazo de antecipação
A	R$ 500,00	2 meses
B	R$ 1 500,00	1 mês
C	R$ 2 000,00	45 dias

Vamos determinar o valor líquido recebido pela empresa.

O valor total dos cheques é R$ 4 000,00.

Calculando os descontos, temos:

- desconto do cheque A: $D_A = 500 \cdot (0{,}028) \cdot 2 = 28$
- desconto do cheque B: $D_B = 1\,500 \cdot (0{,}028) \cdot 1 = 42$
- desconto do cheque C: $D_C = 2\,000 \cdot (0{,}028) \cdot \frac{45}{30} = 84$

Subtraindo os descontos do valor total dos cheques, temos:

$$4\,000 - 28 - 42 - 84 = 3\,846$$

Portanto, o valor líquido recebido pela empresa é R$ 3 846,00.

EXERCÍCIOS

176. Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R$ 14 000,00, dois meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3,5% a.m.
a) Qual o valor do desconto?
b) Qual o valor descontado recebido pela empresa?
c) Qual a taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco?

177. Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R$ 18 000,00, setenta e dois dias antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3,2% a.m. Responda:
a) Qual o valor do desconto?
b) Qual o valor descontado recebido pela empresa?
c) Qual a taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco?

178. Ao descontar uma promissória de R$ 2 800,00 a uma taxa de desconto de 2,4% a.m., o banco creditou na conta de uma certa empresa um valor líquido de R$ 2 632,00. Qual o prazo de antecipação?

179. Artur descontou uma promissória de R$ 8 000,00 em um banco a uma taxa de desconto de 2,5% a.m. Sabendo-se que o desconto foi de R$ 250,00, obtenha o prazo de antecipação expresso em dias.

180. Ao descontar uma promissória com prazo de 45 dias, um banco calculou um desconto de R$ 1 200,00. Qual o valor da promissória sabendo-se que a taxa de desconto utilizada foi de 4% a.m.?

181. Uma gráfica, ao descontar em um banco uma duplicata com prazo de antecipação de 65 dias e valor de R$ 15 000,00, recebeu um valor líquido de R$ 13 800,00. Qual a taxa de desconto mensal utilizada pelo banco?

182. Uma gráfica, necessitando de R$ 15 000,00 para pagamento em 3 meses, pode obter esse valor mediante o desconto de uma duplicata à taxa de desconto de 4% a.m. ou ainda mediante uma linha de crédito bancário que cobra juros simples à taxa de 4,2% a.m. Qual das duas opções é a mais vantajosa para a gráfica?

183. Um banco cobra, em suas operações de desconto de duplicatas com prazo de antecipação de 3 meses, uma taxa de desconto de 3,6% a.m. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?

184. Um comerciante, necessitando hoje de R$ 30 000,00, resolve pedir um empréstimo a um agiota. Este propõe que o comerciante assine uma nota promissória de valor N com prazo de 3 meses. Em seguida, o comerciante desconta a promissória a uma taxa de desconto de 3% a.m. a fim de obter um valor líquido de R$ 30 000,00. Qual o valor de N?

185. Em relação ao exercício anterior, suponha que fossem assinadas duas promissórias, cada uma de valor P, vencíveis em 2 e 3 meses, de modo que a soma de seus valores descontados fosse R$ 30 000,00. Qual o valor de P?

186. Um pequeno comerciante leva a um banco 3 cheques pré-datados, cujos valores são R$ 2 000,00, R$ 2 500,00 e R$ 3 000,00, vencíveis em 45, 60 e 100 dias, respectivamente. O banco utiliza uma taxa de desconto de 2,7% a.m. Qual é o valor líquido recebido pelo comerciante?

187. O dono de uma pequena indústria metalúrgica leva a um banco as duplicatas A, B e C para serem descontadas.

Duplicata	Valor	Prazo de antecipação
A	R$ 4 000,00	2 meses
B	R$ 14 000,00	50 dias
C	R$ 8 000,00	75 dias

Se o banco utilizar uma taxa de desconto de 2,5% a.m., qual será o valor líquido recebido pela empresa?

V. Juros compostos

Consideremos um capital *C* aplicado a juros compostos, a uma taxa *i* por período e durante *n* períodos de tempo. Vamos calcular o montante dessa aplicação.

Temos:

- Montante após 1 período:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$$

- Montante após 2 períodos:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

- Montante após 3 períodos:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2 (1 + i) = C(1 + i)^3$$

...

- Montante após *n* períodos:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1 + i) = C(1 + i)^{n-1} \cdot (1 + i) = C(1 + i)^n$$

Em resumo:

$$M_n = C(1 + i)^n$$

A fórmula acima é indicada habitualmente sem o índice, escrevendo-se simplesmente:

$$\boxed{M = C(1 + i)^n}$$

Observemos que, embora a fórmula acima tenha sido deduzida para *n* inteiro e não negativo, ela pode ser estendida para qualquer valor real não negativo. Além disso, o valor de *n* deve ser expresso de acordo com a unidade de tempo da taxa. Por exemplo, se a taxa for mensal, *n* deve ser expresso em meses, se a taxa for anual, *n* deve ser expresso em anos.

Exemplos

1º) Um capital de R$ 5 000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Qual o montante se os prazos de aplicação forem:

a) 5 meses b) 2 anos

Seja:

a) $C = 5\,000$, $i = 2\%$ a.m. e $n = 5$ meses, temos:

$$M = 5\,000(1 + 0{,}02)^5 = 5\,000(1{,}02)^5 = 5\,520{,}40$$

b) Seja $C = 5\,000$, $i = 2\%$ a.m. e $n = 24$ meses (pois *n* deve ser expresso em meses), temos:

$$M = 5\,000(1 + 0{,}02)^{24} = 5\,000(1{,}02)^{24} = 8\,042{,}19$$

Observação

Nesses cálculos, primeiro calculamos a potência usando as teclas y^x ou x^y de uma calculadora e, com o resultado no visor, multiplicamos pelo capital.

Caso tivéssemos calculado a potência arredondada para 4 casas decimais, por exemplo, e multiplicássemos o resultado pelo capital, teríamos um resultado ligeiramente diferente em virtude do arredondamento. Assim, no cálculo de $5\,000(1{,}02)^5$, teríamos:

$$5\,000(1{,}02)^5 = 5\,000(1{,}1041) = 5\,520{,}50$$

Todavia, julgamos que essas pequenas diferenças por arredondamento não devem constituir motivo de preocupação, pelo menos nesta etapa da aprendizagem.

2º) Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos durante 5 meses e à taxa de 1,5% a.m. para resultar em um montante de R$ 12 000,00?

Seja *C* o capital aplicado. Devemos ter:

$$12\,000 = C(1 + 0{,}015)^5$$

Portanto:

$$12\,000 = C(1{,}015)^5$$

$$12\,000 = C(1{,}0773)$$

$$C = \frac{12\,000}{1{,}0773} = 11\,138{,}96$$

O capital que deve ser aplicado é R$ 11 138,96.

Notemos que o resultado foi obtido usando-se 4 casas decimais na calculadora. Se tivéssemos utilizado um número diferente de casas decimais, teríamos obtido um resultado ligeiramente diferente.

3º) Um capital de R$ 2 000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 4 meses, produzindo um montante de R$ 2 200,00. Qual a taxa mensal de juros da aplicação?

Designando por *i* a taxa mensal procurada, devemos ter:

$$2\,200 = 2\,000(1 + i)^4$$

Portanto:

$$(1 + i)^4 = 1{,}1$$
$$\left[(1 + i)^4\right]^{\frac{1}{4}} = [1{,}1]^{\frac{1}{4}}$$
$$(1 + i)^1 = (1{,}1)^{0{,}25}$$
$$1 + i = 1{,}0241$$
$$i = 0{,}0241 = 2{,}41\% \text{ a.m.}$$

Assim, a taxa mensal de juros da aplicação é 2,41%.

4º) Um capital de R$ 7 000,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 18% a.a. Calcule o montante se os prazos forem:

a) 180 dias b) 72 dias

a) Temos C = 7 000, i = 18% a.a. e $n = \frac{180}{360} = 0{,}5$ ano

Portanto:

$$M = 7\,000(1{,}18)^{0{,}5}$$
$$M = 7\,603{,}95$$

O montante em 180 dias é R$ 7 603,95.

b) Temos C = 7 000, i = 18% a.a. e $n = \frac{72}{360} = 0{,}2$ ano

Portanto:

$$M = 7\,000(1{,}18)^{0{,}20}$$
$$M = 7\,235{,}60$$

O montante em 72 dias é R$ 7 235,60.

5º) Durante quanto tempo um capital de R$ 2 000,00 deve ser aplicado a juros compostos e à taxa de 1,5% a.m. para gerar um montante de R$ 2 236,28?

Seja n o prazo procurado. Então:

$$2\,236{,}28 = 2\,000(1{,}015)^n$$
$$(1{,}015)^n = 1{,}118140$$

Calculando o logaritmo decimal de ambos os membros, teremos:

$$\log (1{,}015)^n = \log 1{,}118140$$
$$n \cdot \log (1{,}015) = \log 1{,}118140$$
$$n = \frac{\log 1{,}118140}{\log 1{,}015}$$

Os logaritmos acima podem ser calculados com o auxílio de uma calculadora (tecla log).

Assim:

$$n = \frac{0{,}048496}{0{,}006466} = 7{,}5$$

Portanto, o capital deve ser aplicado por 7,5 meses.

EXERCÍCIOS

188. Qual o montante de uma aplicação de R$ 3 000,00 a juros compostos, durante 10 meses, à taxa de 1,4% a.m.?

189. Uma empresa tomou um empréstimo bancário de R$ 80 000,00 pelo prazo de 1 ano. Calcule o montante pago sabendo que o banco cobrou juros compostos à taxa de 5% a.t.

190. a) Um investidor aplicou R$ 12 000,00 a juros compostos, durante 2 anos, à taxa de 1,5% a.m. Qual o valor dos juros recebidos?

b) Considerando o valor de juros recebidos o mesmo do item anterior, e o regime de juros simples, qual seria a taxa mensal com o mesmo prazo de aplicação?

191. (PUC-RJ, adaptado) Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R$ 1 500,00 aplicados cumulativamente nessa carteira valem aproximadamente x reais. Determine o valor de x.

192. Afonso pode comprar um terreno por R$ 20 000,00. Ele sabe que, com certeza, o terreno valerá R$ 30 000,00 daqui a 5 anos. Se ele tiver a alternativa de aplicar o dinheiro a juros compostos, à taxa de 9% ao ano, será que a aplicação no terreno valerá a pena?

193. Em 1626, Peter Minuit comprou a ilha de Manhattan (em Nova Iorque) dos índios em troca de objetos no valor de 24 dólares. (Dados extraídos de: Zvi Bodie. *Finanças*. Porto Alegre: Bookman, 1999.) Se os índios tivessem recebido em dinheiro e aplicado esse valor a juros compostos, à taxa de 8% a.a., qual teria sido seu montante em 2004, 378 anos depois?

194. (UF-PE, adaptado) Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos, com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal, que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimos com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maiores que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal? (Use a aproximação $1{,}03^{12} \cong 1{,}42$.)

195. José Luís aplicou R$ 12 000,00 por 10 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 1,4% a.m.

a) Qual o montante recebido?

b) Quanto ele ganhou de juros ao longo do 10º mês?

196. (UF-PA, adaptado) Suely recebeu R$ 1 000,00 (mil reais) e pretende investi-los no prazo de dois anos. Um amigo lhe sugere duas opções de investimento. Na primeira delas, a rentabilidade é de 20% ao ano e, no momento do resgate, há um desconto de 25% sobre o valor acumulado, referente ao imposto de renda. Na segunda, a rentabilidade é de 6% ao ano, sem incidência de imposto. Efetuando os cálculos necessários, determine qual aplicação renderá mais a Suely após dois anos. Suponha regime de juros compostos.

197. José Carlos aplicou R$ 10 000,00 e aplicará mais R$ 10 000,00 daqui a 3 meses num fundo de investimentos que rende juros compostos à taxa de 1,3% a.m. Qual será seu montante daqui a 9 meses?

198. Teresa aplicou 30% de seu capital, durante um ano, a juros simples e à taxa de 2,5% a.m. O restante foi aplicado a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m., também por um ano. Qual foi a taxa de rendimento anual auferida na aplicação como um todo em relação ao capital inicial?

199. Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,8% a.m., durante 8 meses, para dar um montante de R$ 6 000,00?

200. Cristina tem uma dívida de R$ 10 000,00 que vence no prazo de 5 meses. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1,2% a.m., para poder pagar a dívida?

201. O sr. Fontana pretende abrir mais uma farmácia dentro de 2 anos, em sua rede de farmácias. Para isso, ele precisará ter R$ 120 000,00 daqui a 2 anos. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1,6% a.m., para atingir seu objetivo?

202. Um capital de R$ 2 000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 10 meses, gerando um montante de R$ 2 400,00. Qual a taxa mensal de juros compostos?

203. Um microcomputador é vendido à vista por R$ 2 000,00 ou a prazo com R$ 400,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1 800,00 a ser paga três meses após a compra. Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

204. Um fogão é vendido à vista por R$ 800,00 ou a prazo com 30% de entrada mais uma parcela de R$ 700,00 após 5 meses. Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

205. Um videocassete é vendido por R$ 600,00 para pagamento dentro de 2 meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 5% sobre o preço de R$ 600,00. Qual a taxa mensal de juros compostos cobrada na venda a prazo?

206. A que taxa trimestral de juros compostos um capital deve ser aplicado durante 1 ano para que duplique seu valor?

207. César aplicou um capital a juros compostos, durante 2 anos e meio, e recebeu de juros 40% do capital aplicado. Qual a taxa mensal de juros?

208. Um capital de R$ 4 000,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 25% a.a. Calcule o montante, considerando cada um dos seguintes prazos de aplicação:

a) 90 dias b) 1 mês c) 120 dias d) 75 dias e) 5 meses

209. Um banco concedeu um empréstimo a uma empresa no valor de R$ 20 000,00, pelo prazo de 72 dias, cobrando um montante de R$ 26 000,00.

a) Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

b) Qual a taxa anual de juros compostos do financiamento?

210. Durante quanto tempo um capital de R$ 5 000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,9% a.m., para se obter um montante de R$ 7 000,00?

211. Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m., para que triplique seu valor?

212. Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 5% a.t., para que quadruplique seu valor?

213. Augusto aplicou um capital a juros compostos e à taxa de 1,3% a.m. Qual o prazo da aplicação para que ele receba de juros 60% do capital aplicado?

214. Um agiota emprestou certa quantia, por 1 ano e 8 meses, a juros simples, à taxa de 10% a.m., recebendo ao final desse período o capital acrescido dos juros. Por quanto tempo ele deveria aplicar o capital emprestado, a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m., a fim de receber o mesmo montante do empréstimo?

215. (UF-PI) Um capital é empregado a uma taxa anual de 5% (juros compostos), calculada anualmente. Se o valor do montante, depois de n anos, é aproximadamente 34% maior do que o capital inicial, qual o valor de n? (Use $\log_{10} 1,05 = 0,02$ e $\log_{10} 1,34 = 0,12$.)

216. Um capital de R$ 900,00 é aplicado a juros compostos e à taxa de 3% a.m. Outro capital de R$ 1 000,00 também é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Depois de quanto tempo aproximadamente os montantes se igualam?

217. (FGV-SP)

a) Uma empresa tomou um empréstimo bancário de R$ 500 000,00 para pagamento em 3 parcelas anuais, sendo a 1ª daqui a 1 ano. O banco combinou cobrar juros compostos a uma taxa de 20% ao ano. Sabendo-se que a 1ª parcela foi de R$ 180 000,00 e a 2ª de R$ 200 000,00, qual será o valor da 3ª?

b) Durante quantos meses um capital deve ser aplicado a juros compostos e à taxa de 8% ao ano para que o montante seja o triplo do capital aplicado? (Você pode deixar a resposta indicada, sem fazer os cálculos.)

218. (U. F. Ouro Preto-MG) Chamamos de sistema de juros contínuos ao tipo de aplicação na qual os juros são capitalizados a cada instante *t*. Nesse tipo de aplicação, um capital *C*, empregado a uma taxa de *i*% ao ano, depois de *t* anos, será transformado em $C \cdot e^{\left(\frac{i \cdot t}{100}\right)}$, onde *e* é um número irracional cujo valor aproximado é 2,71.
Com base nas informações anteriores, calcule, aproximadamente, quanto tempo será necessário para que seja dobrado um capital *C* aplicado a juros contínuos de 20% ao ano.
(Dado: $\log_e 2 \cong 0{,}69$.)

219. Um capital *C* é aplicado a uma taxa mensal de juros *i* durante *n* meses. Para que valores de *n* o montante a juros simples é maior que o montante a juros compostos?

VI. Juros compostos com taxa de juros variáveis

Ao deduzirmos a fórmula do montante no item *Juros compostos*, admitimos que a taxa de juros permanecia constante em todos os períodos. Todavia, há algumas situações em que a taxa pode se modificar ao longo dos períodos. Um exemplo comum dessa situação ocorre quando analisamos as taxas de rentabilidade de fundos, que geralmente assumem valores diferentes mês a mês.

Consideremos um capital *C* aplicado a juros compostos, durante *n* períodos de tempo, sendo i_1 a taxa no 1º período, i_2 a taxa no 2º período, i_3 a taxa no 3º período, e assim sucessivamente até a taxa i_n no n-ésimo período, como mostra a figura abaixo.

Para obtermos o montante final da aplicação, vamos calcular o montante em cada um dos períodos.

- Montante ao final do 1º período:

$$M_1 = C + C \cdot i_1 = C(1 + i_1)$$

- Montante ao final do 2º período:

$$M_2 = M_1(1 + i_2) = C(1 + i_1)(1 + i_2)$$

- Montante ao final do 3º período:

$$M_3 = M_2(1 + i_3) = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$

Procedendo de modo análogo até o último período, podemos concluir que o montante ao final do último período é dado por:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \ldots (1 + i_n)$$

Exemplos

1º) Um investidor aplicou R$ 8 000,00 num fundo de investimentos por 3 meses. No 1º mês o fundo rendeu 1,2%, no 2º mês rendeu 1,7% e no 3º rendeu 1,5%.

a) Qual o montante ao final dos 3 meses?
De acordo com a fórmula descrita anteriormente:

$$M = 8\,000(1{,}012)(1{,}017)(1{,}015)$$

$$M = 8\,357{,}14$$

Assim, o montante ao final dos três meses foi R$ 8 357,14.

b) Qual a taxa de rentabilidade acumulada no trimestre?
Seja *i* a taxa acumulada no trimestre. O montante para essa taxa deve ser igual ao montante obtido no item *a*, isto é:

$$8\,000(1 + i)^1 = 8\,357{,}14$$

Portanto:

$$1 + i = 1{,}0446$$

$$i = 0{,}0446 = 4{,}46\%$$

A taxa de rentabilidade acumulada no trimestre foi de 4,46%.

2º) Em certo mês, um fundo de investimentos rendeu 5%, e, no mês seguinte, rendeu −3%. Qual foi a taxa de rentabilidade acumulada no bimestre?

Seja *i* a taxa acumulada no bimestre. Devemos ter:

$$C(1 + i) = C(1,05)(1 - 0,03)$$
$$1 + i = (1,05)(0,97)$$
$$1 + i = 1,0185$$
$$i = 0,0185 = 1,85\%$$

Portanto, a taxa de rentabilidade acumulada no bimestre foi de 1,85%.

EXERCÍCIOS

220. Um investidor aplicou R$ 7 500,00 num fundo de investimentos por 2 meses. No 1º mês o fundo rendeu 1,9% e no 2º rendeu 2,4%.

a) Qual o montante após os 2 meses?

b) Qual a taxa acumulada no bimestre?

221. Em outubro, novembro e dezembro um fundo de investimentos rendeu 2,1%, 1,7% e 1,9%, respectivamente. Qual foi o montante, no final de dezembro, de uma aplicação de R$ 12 000,00 feita no início de outubro?

222. Em 3 meses sucessivos um fundo de ações rendeu 4%, −2% e −6%. Qual o montante obtido, ao final dos 3 meses, de uma aplicação inicial de R$ 14 000,00?

223. Se em 12 meses sucessivos um fundo render 1,2% a.m., qual será o montante de uma aplicação inicial de R$ 10 000,00?

224. Em janeiro, um fundo rendeu 2% e em fevereiro rendeu 2,5%. Responda:

a) Qual a taxa de rentabilidade acumulada no período?

b) Qual deveria ser a taxa de rentabilidade em março para que a taxa acumulada no trimestre fosse 6,5%?

225. Se em 4 meses sucessivos um fundo de ações render −1,5% a.m., qual será a taxa acumulada no quadrimestre?

VII. Valor atual de um conjunto de capitais

Suponhamos que uma pessoa tenha uma dívida de R$ 15 000,00 que vence daqui a 1 mês. Suponhamos ainda que ela consiga aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje àquela taxa para ter dinheiro suficiente para pagar a dívida?

Para resolvermos essa questão, devemos encontrar o capital que, aplicado por 1 mês a juros compostos e à taxa de 2% a.m., gera um montante de R$ 15 000,00. Assim, indicando esse capital por *C*, devemos ter:

$$C(1,02)^1 = 15\,000$$

E, portanto:

$$C = \frac{15\,000}{(1,02)^1} = 14\,705,88$$

O valor encontrado é chamado de *valor atual* de R$ 15 000,00 a uma taxa de 2% a.m.

No exemplo citado, caso a pessoa tivesse uma dívida de R$ 15 000,00 para daqui a 1 mês e outra de R$ 16 000,00 para daqui a 2 meses, o valor que ela precisaria para pagar ambos os compromissos pode ser obtido da seguinte forma:

- Para pagar a dívida de R$ 15 000,00, hoje a pessoa precisaria de:

$$C = \frac{15\,000}{(1,02)^1} = 14\,705,88$$

- Para pagar a dívida de R$ 16 000,00, hoje ela precisaria de:

$$C = \frac{16\,000}{(1,02)^2} = 15\,378,70$$

- Portanto, para saldar as duas dívidas, hoje ela precisaria de:

$$\frac{15\,000}{(1,02)^1} + \frac{16\,000}{(1,02)^2} = 30\,084,58$$

Esse valor é chamado de *valor atual* dos valores de R$ 15 000,00 e R$ 16 000,00 à taxa de 2% a.m.

De modo geral, dado um conjunto de valores monetários Y_1 na data 1, Y_2 na data 2, Y_3 na data 3, e assim por diante até o valor Y_n na data *n* (ver figura a seguir), chamamos de valor atual desse conjunto, a uma taxa *i*, ao

valor indicado por V, que, aplicado à taxa i, gera as rendas $Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_n$, isto é:

$$V = \frac{Y_1}{(1+i)^1} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}$$

Exemplos

1º) Uma pessoa tem dívidas de R$ 2 000,00, R$ 3 500,00 e R$ 5 000,00 que vencem dentro de 2, 5 e 6 meses, respectivamente. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1% a.m., para poder pagar os compromissos?

O valor que deve ser aplicado hoje, para fazer frente aos compromissos, corresponde ao valor atual dos compromissos à taxa de 1% a.m., e vale:

$$V = \frac{2\,000}{(1{,}01)^2} + \frac{3\,500}{(1{,}01)^5} + \frac{5\,000}{(1{,}01)^6}$$

Portanto:

$$V = 1\,960{,}59 + 3\,330{,}13 + 4\,710{,}23 = 10\,000{,}95$$

O valor a ser aplicado é R$ 10 000,95.

2º) Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 5 prestações mensais de R$ 400,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for à vista, o preço cobrado é R$ 1 750,00. Qual a melhor alternativa de pagamento de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de juros compostos igual a 2% a.m.?

Para podermos comparar as duas alternativas, temos de obter o valor atual das duas alternativas e escolher a de menor valor atual. Evidentemente o valor atual do pagamento à vista é R$ 1 750,00. O valor atual do pagamento a prazo é dado por:

$$V = \frac{400}{(1{,}02)} + \frac{400}{(1{,}02)^2} + \frac{400}{(1{,}02)^3} + \frac{400}{(1{,}02)^4} + \frac{400}{(1{,}02)^5}$$

Assim:

$$V = 392{,}16 + 384{,}47 + 376{,}93 + 369{,}54 + 362{,}29 = 1\,885{,}39$$

Como o valor atual do pagamento à vista é menor do que o valor atual do pagamento a prazo, a melhor alternativa é o pagamento à vista.

EXERCÍCIOS

226. Uma pessoa tem dívidas de R$ 9 000,00 e R$ 8 000,00 que vencem dentro de 1 e 2 meses, respectivamente. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos, para fazer frente aos compromissos? Considere cada uma das seguintes taxas de aplicação:

a) 2% a.m. b) 1,5% a.m. c) 1% a.m. d) 0,5% a.m. e) 0% a.m.

227. Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1,4% a.m., para poder pagar uma dívida de R$ 3 600,00 daqui a 3 meses e outra de R$ 8 700,00 daqui a 5 meses?

228. Uma televisão é vendida à vista por R$ 900,00 ou a prazo em 3 prestações mensais de R$ 305,00 cada uma. A primeira prestação vence um mês após a compra. Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro a juros compostos, se a taxa for:

a) 1,5% a.m. b) 0,5% a.m.

229. O preço à vista de um automóvel é R$ 18 000,00, mas pode ser vendido a prazo com 20% de entrada mais 5 prestações mensais de R$ 3 000,00 cada uma. Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro a juros compostos à taxa de 1,6% a.m.?

230. Um microcomputador é encontrado à venda em duas condições de pagamento:

- em 3 prestações mensais de R$ 1 024,00 cada uma, sem entrada;
- em 4 prestações mensais de R$ 778,00 cada uma, sem entrada.

Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro a juros compostos e à taxa de 1% a.m.?

231. (Unicamp-SP) O IPVA de um carro, cujo valor é R$ 8 400,00, é de 3% do valor do carro e pode ser pago de uma das seguintes formas:

a) À vista, no dia 15/1/1996, com um desconto de 5%. Qual o valor a ser pago nesse caso?

b) Em 3 parcelas iguais (sem desconto), sendo a primeira no dia 15/1/1996, a segunda no dia 14/2/1996 e a terceira no dia 14/3/1996. Qual o valor de cada parcela nesse caso?

c) Suponha que o contribuinte disponha da importância para o pagamento à vista (com desconto) e que, nos períodos de 15/1/1996 a 14/2/1996 e de 14/2/1996 a 14/3/1996, o dinheiro disponível possa ser aplicado a uma taxa de 4% em cada um desses períodos. Qual a forma de pagamento mais vantajosa para o contribuinte? Apresente os cálculos que justificam sua resposta.

232. (UF-RJ) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Certa mercadoria, cujo preço à vista é P, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias. Determine P, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

233. Uma televisão é vendida à vista por R$ 1 100,00 ou a prazo, em duas prestações mensais iguais sem entrada.

a) Qual o valor de cada prestação se a loja cobra juros compostos com taxa de 4% a.m.?

b) Qual o valor de cada prestação, considerando uma taxa de juros compostos de 3% a.m.?

234. Um aparelho de som é vendido à vista por R$ 1 200,00 ou a prazo com R$ 200,00 de entrada mais 3 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a loja cobra juros compostos à taxa de 3% a.m.?

VIII. Seqüência uniforme de pagamentos

Consideremos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1, 2, 3, ..., n e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo.

Chamamos esse conjunto de *seqüência uniforme de pagamentos*. Veja a figura a seguir, em que os pagamentos são representados por R.

Podemos indicar o valor atual das prestações, representado por V, à taxa i, como:

$$V = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + ... + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Considerando que o 2º membro dessa expressão é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita, cuja razão é $q = \frac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = \frac{R}{(1+i)}$, podemos aplicar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita, como segue:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

Assim, temos:

$$V = \frac{\frac{R}{(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

$$V = R \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}}$$

$$V = R \cdot \frac{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{-i} = R \cdot \frac{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{i}$$

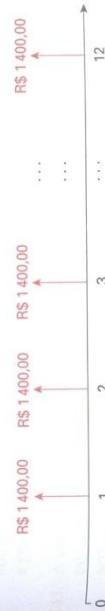
E, finalmente:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Essa é a fórmula que relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e número de prestações.

Exemplos

1º.) Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1 400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.?

O empréstimo deve ser pago em 12 prestações mensais uniformes, sem entrada, conforme mostra a figura abaixo:

Assim, temos R = 1 400, n = 12 e i = 3% a.m.

O valor do empréstimo corresponde ao valor atual desses pagamentos, que, conforme a fórmula dada, vale:

$$V = 1\,400 \cdot \frac{(1{,}03)^{12} - 1}{(1{,}03)^{12} \cdot 0{,}03}$$

$$V = 13\,935{,}61$$

Portanto, o valor emprestado pelo banco foi de R$ 13 935,61.

2º) Uma loja vende uma televisão por R$ 1 200,00 à vista ou financia essa quantia em 5 prestações mensais iguais sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,5% a.m.?

Chamando de *R* o valor de cada prestação, os pagamentos podem ser representados pela figura abaixo:

Temos V = 1 200, n = 5 e i = 2,5% a.m.

Portanto:

$$1\,200 = R \cdot \frac{(1{,}025)^5 - 1}{(1{,}025)^5 \cdot 0{,}025}$$

$$1\,200 = R \cdot 4{,}645828$$

$$R = \frac{1\,200}{4{,}645828} = 258{,}30$$

Assim, cada prestação mensal deve valer R$ 258,30.

3º) Qual será o valor de cada prestação do exemplo anterior se a loja cobrar uma entrada de R$ 300,00?

Nesse caso o valor financiado passa a ser R$ 900,00 (1 200 − 300).

Assim, V = 900, n = 5 e i = 2,5% a.m.

Portanto:

$$900 = R \cdot \frac{(1{,}025)^5 - 1}{(1{,}025)^5 \cdot 0{,}025}$$

$$900 = R \cdot (4{,}645828)$$

$$R = \frac{900}{4{,}645828} = 193{,}72$$

O valor de cada prestação será R$ 193,72.

EXERCÍCIOS

235. Um banco concede um empréstimo a uma pessoa cobrando 10 prestações mensais de R$ 700,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor emprestado, sabendo-se que o banco cobra juros compostos, à taxa de 4% a.m.?

236. Na venda de uma geladeira, uma loja anuncia o pagamento em 6 prestações mensais de R$ 1 250,00 cada uma, sem entrada. Qual o preço à vista, sabendo-se que a loja cobra no financiamento juros compostos, à taxa de 3,2% a.m.?

237. Um banco concede um empréstimo de R$ 20 000,00 a uma pessoa, para ser pago em 8 prestações mensais iguais, sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,8% a.m.?

238. Um aparelho de som é vendido à vista por R$ 900,00 ou a prazo em *n* prestações mensais iguais, sem entrada. Se a loja cobra em seus financiamentos a taxa de juros compostos de 2,7% a.m., determine o valor de cada prestação nos seguintes casos:

a) n = 12 b) n = 18 c) n = 24

239. Um automóvel 0 km é vendido à vista por R$ 32 000,00 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos do financiamento for de 1,8% a.m.?

240. Um microcomputador é vendido à vista por R$ 3 000,00 ou a prazo em 3 prestações mensais iguais, considerando-se a 1ª prestação como entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 2,6% a.m.?

241. A sra. Estela pretende ter uma renda mensal de R$ 2 500,00, durante 48 meses, começando daqui a um mês. Quanto deverá aplicar hoje, num fundo que rende 1,4% a.m., para atingir seu objetivo?

242. O sr. Tanaka pretende juntar um montante *M* de modo que esse valor aplicado num fundo que rende juros compostos à taxa de 14% a.a. lhe proporcione a possibilidade de fazer cinco retiradas anuais de R$ 25 000,00 cada uma. Supondo que a primeira retirada seja feita um ano após a aplicação, determine o valor de *M*.

243. A empresa Vesúvio S.A., visando promover suas vendas, resolve dar um prêmio de R$ 500 000,00 a um de seus clientes escolhido por sorteio. O prêmio será pago em 10 parcelas anuais de R$ 50 000,00 cada uma, sendo a primeira um ano após o sorteio. Quanto a empresa deverá aplicar, na data do sorteio, a juros compostos e à taxa de 15% a.a., para fazer frente aos pagamentos?

244. A sra. Helena pretende passar 24 meses na Europa fazendo um curso de pós-graduação. Ela estima que precisará ter uma renda mensal de R$ 4 500,00, começando com sua chegada à Europa. Para atingir seu objetivo, ela precisará aplicar um valor *X*, a juros compostos, à taxa de 1,6% a.m., 60 meses antes do 1º saque de R$ 4 500,00. Qual o valor de *X*?

245. (FGV-SP) Se um investidor aplicar hoje *P* reais a uma taxa de juros mensal igual a *i*, ele poderá sacar *R* reais por mês (começando daqui a um mês), durante *n* meses, até esgotar seu saldo bancário. Sabendo-se que $P = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$:

a) calcule *R* para que ele esgote seu saldo 1 mês após aplicar R$ 5 000,00, à taxa de juros de 2% ao mês.

b) expresse *n* em função de *P*, *R* e *i*.

246. Num país sem inflação, o sr. Olavo recebeu $ 100 000,00 de prêmio em uma loteria. Se ele aplicar esse valor num fundo que rende juros compostos à taxa de 0,5% a.m. e sacar $ 1 000,00 por mês (começando 1 mês após o depósito), durante quantos meses aproximadamente ele poderá efetuar os saques até esgotar seu saldo? Qual seria a resposta se ele sacasse $ 2 000,00 por mês?

IX. Montante de uma seqüência uniforme de depósitos

Suponhamos que uma pessoa deposite mensalmente R$ 500,00 num fundo que renda juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Se ela quiser saber seu montante logo após ter feito o 20º depósito, podemos achar o montante de cada depósito e, em seguida, somá-los para obter o resultado desejado. A soma dos montantes de cada depósito recebe o nome de *montante de uma seqüência uniforme de depósitos*. O cálculo desse montante pode ser facilitado se levarmos em consideração o raciocínio a seguir.

Consideremos *n* depósitos mensais iguais a *R*, nas datas 1, 2, 3, ... *n*, rendendo juros compostos, a uma taxa *i* mensal (veja a figura abaixo). Queremos saber qual a soma *M* dos montantes desses depósitos na data *n* (isto é, logo após ter sido feito o último depósito).

Temos:

- o montante do 1º depósito na data *n*: $R \cdot (1+i)^{n-1}$;
- o montante do 2º depósito na data *n*: $R \cdot (1+i)^{n-2}$;
- o montante do 3º depósito na data *n*: $R \cdot (1+i)^{n-3}$.

Procedendo de modo análogo com os outros depósitos, obtemos o montante do último depósito na data *n*, que vale *R*.

Assim:

$$M = R \cdot (1+i)^{n-1} + R \cdot (1+i)^{n-2} + R \cdot (1+i)^{n-3} + \ldots + R$$

Os termos do 2º membro dessa expressão constituem uma Progressão Geométrica cuja razão vale $q = \frac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = R(1+i)^{n-1}$.

Ao aplicar a fórmula da soma dos termos da Progressão Geométrica finita, temos:

$$M = \frac{R \cdot (1+i)^{n-1}\left(\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right)}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$M = R \cdot \frac{\frac{1}{1+i} - (1+i)^{n-1}}{\frac{-i}{1+i}}$$

$$M = R \cdot \frac{\frac{1-(1+i)^n}{1+i}}{\frac{-i}{1+i}}$$

$$M = R \cdot \frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

E, finalmente:

$$\boxed{M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Exemplo

Uma pessoa deposita mensalmente R$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito?

Temos R = 600, n = 30 e i = 1,5% a.m.

Portanto:

$$M = 600 \cdot \frac{(1,015)^{30} - 1}{0,015}$$

$$M = 22\,523,21$$

Assim, no instante imediatamente após o 30º depósito, o montante valerá R$ 22 523,21.

EXERCÍCIOS

247. Uma pessoa deposita mensalmente R$ 700,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,3% a.m. São feitos 25 depósitos.

a) Qual será seu montante no instante após o último depósito?

b) Qual será seu montante 3 meses após ter feito o último depósito?

248. Quanto uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., para ter um montante de R$ 30 000,00 no instante após o último depósito? (Considere que foram feitos 40 depósitos.)

249. Calcule a quantia que uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,6% a.m., para ter um montante de R$ 20 000,00 no instante após o último depósito. (Considere que foram feitos 30 depósitos.)

250. Para ampliar as instalações de sua loja de eletrodomésticos, o sr. Martinez estima que precisará de R$ 80 000,00 daqui a 18 meses. Quanto deverá depositar mensalmente, num total de 18 parcelas, à taxa de juros compostos de 1,5% a.m., para que no instante do último depósito consiga um montante de R$ 80 000,00?

251. Uma transportadora pretende comprar um caminhão dentro de 24 meses e estima que seu preço nessa data será R$ 90 000,00. Para atingir seu objetivo, ela resolve fazer 24 depósitos mensais de x reais cada um num fundo que

rende 1,5% ao mês, de modo que no instante do último depósito o saldo dessas aplicações seja R$ 90 000,00.

a) Qual o valor de x?

b) No dia em que foi feito o 18º depósito, surgiu uma emergência e a empresa teve que sacar todo o saldo das aplicações. Qual era o valor desse saldo?

252. (FGV-SP) O salário líquido do sr. Ernesto é R$ 3 000,00 por mês. Todo mês ele poupa 10% de seu salário líquido e aplica essa poupança num fundo que rende juros compostos, à taxa de 2% ao mês.

a) Qual seu saldo no fundo, no dia em que fez o segundo depósito?

b) Quantos depósitos deverá fazer para ter um saldo de R$ 7 289,00 no dia do último depósito?

253. A sra. Marli pretende custear os estudos universitários de seu filho, estimados em R$ 1 800,00 por mês, durante 60 meses. Para isso, ela resolve depositar k reais por mês num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., num total de 48 depósitos. Sabendo-se que serão sacados R$ 1 800,00 por mês desse fundo, sendo o primeiro saque realizado 1 mês após o último depósito, obtenha o valor de k.

254. Num país sem inflação, uma pessoa efetua 180 depósitos mensais de $ 800,00 cada um, num fundo que rende 0,5% a.m.

a) Qual seu montante no instante após o último depósito?

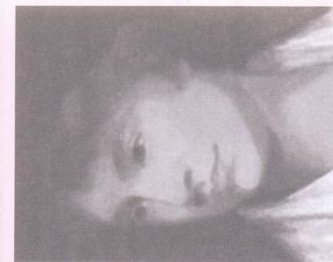
b) Se 1 mês após o último depósito ela resolve sacar desse fundo uma quantia x por mês, durante 200 meses, qual o valor de x?

LEITURA

Richard Price e a seqüência uniforme de capitais

Há dois tipos de problemas bastante freqüentes em operações financeiras. O primeiro diz respeito ao cálculo da prestação de um financiamento em prestações iguais no regime de juros compostos, dados o valor financiado, a taxa de juros e o número de prestações. O segundo refere-se ao montante auferido por uma sucessão de depósitos iguais a juros compostos, dados o valor de cada depósito, a taxa de juros e o número de depósitos.

Essa sucessão de valores iguais (pagamentos ou depósitos) é chamada de *seqüência uniforme de capitais*.

Um dos pioneiros na utilização desses problemas no cálculo de aposentadorias e pensões foi o filósofo, teólogo e especialista em finanças e seguros Richard Price.

Richard Price (1723-1791).

Nascido na Inglaterra em Tynton, Glamorgan, em fevereiro de 1723, foi educado em sua cidade natal até a morte de seu pai, depois mudou-se para Londres em 1740. Nessa cidade, recebeu sólidos conhecimentos de Matemática, e foi discípulo de John Eames.

Permaneceu estudando até 1748, ano em que se tornou ministro presbiteriano. Em 1758, publicou o livro *Revisão das questões principais em moral*, que causou grande impacto na conservadora sociedade britânica pela proposta de revisão das questões morais da época. Em 1766, publicou a *Importância do cristianismo*, obra na qual está presente a rejeição às idéias tradicionais cristãs como pecado original, castigo eterno e purgatório.

Três anos depois, a pedido da seguradora inglesa Sociedade de Eqüitativa, Price publicou um trabalho na área de Estatística e Atuária chamado *Tabelas de mortalidade de Northampton*, que serviu para o cálculo das probabilidades de morte e sobrevivência de um indivíduo em função da idade. Essas tabelas serviram de base para o cálculo de seguros e aposentadorias.

Em 1771, publicou sua mais famosa obra da área financeira e atuarial intitulada *Observações sobre pagamentos reversíveis*. Nessa obra, Price elaborou tabelas para o cálculo de juros compostos, explicou o financiamento por meio da seqüência uniforme de pagamentos, o montante gerado por depósitos em seqüência uniforme, rendas vitalícias em aposentadorias e cálculo de prêmio de seguros de vida.

Em 1776, publicou *Observações sobre a natureza da liberdade civil, os princípios do governo, e a justiça e a política da guerra com a América*, um sucesso de vendas na América e na Inglaterra (cerca de 60 000 exemplares em poucos meses). Graças a essa obra e suas idéias, foi convidado pelo Congresso dos Estados Unidos da América para exercer a função de conselheiro na área financeira.

Nos últimos anos de sua vida, em 1789, fez um de seus últimos discursos em defesa da Revolução Francesa, *Discurso sobre o amor pelo nosso país*, que provocou fortes reações na sociedade britânica conservadora. Price foi chamado de ateu pelo rei George III. Seus adversários ideológicos combateram suas idéias por meio de panfletos, chegando até a ser caricaturado como insano e ateu por James Gillray, famoso caricaturista da época.

Price faleceu em Hackney, próximo de Londres, em abril de 1791, aos 68 anos de idade.

CAPÍTULO III

Estatística Descritiva

I. Introdução

Imagine que, um mês antes de uma eleição presidencial, a federação das indústrias de determinado Estado encomendou a um instituto especializado uma pesquisa cujo objetivo consistiu em detectar a intenção de voto do eleitor e levantar o perfil socioeconômico dos eleitores de cada um dos candidatos.

O que o instituto fez?

- Primeiramente, dimensionou uma amostra da população e fez a coleta de dados por meio de uma pesquisa de campo. A escolha da amostra é, em geral, complexa, pois deve-se levar em conta, entre outros fatores, o tempo e o custo da pesquisa, o número de eleitores de cada cidade do Estado, a camada social à qual o entrevistado pertence, o local onde será feita a entrevista. É imprescindível que a amostra seja representativa, a fim de não haver comprometimento na análise dos resultados.
- Num segundo momento, organizou em tabelas os dados brutos coletados, construiu gráficos para apresentar os resultados obtidos e divulgou-os nos meios de comunicação. É preciso também associar ao conjunto de informações medidas de tendência *central* e medidas de *variabilidade* (ou dispersão dos dados em relação a valores centrais).
- Por fim, fez a análise confirmatória dos dados, isto é, verificou a margem de erro com que os resultados da amostra refletiram, de fato, a intenção de votos de toda a população de eleitores.

A ciência que se dedica a esse trabalho é a *Estatística*.

Os levantamentos estatísticos costumam ser divulgados em jornais, revistas, televisão, Internet, etc. e quase sempre têm relação direta com a vida das pessoas, pois envolvem assuntos como saúde, comportamento, bem-estar e desenvolvimento humano, economia, demografia, pesquisas de mercado, educação, entre muitos outros.

Sobre as etapas mencionadas, podemos dizer que a primeira diz respeito às técnicas de *Amostragem*, a segunda compete à *Estatística Descritiva* e a última é objeto de estudo da *Inferência Estatística*.

A Estatística Descritiva é utilizada também para se organizarem e resumirem informações relativas a uma população inteira, como ocorre, por exemplo, nos censos demográficos efetuados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Neste capítulo, nos ocuparemos do estudo de aspectos relacionados à Estatística Descritiva.

II. Variável

A entidade representativa dos moradores de um bairro queria traçar um perfil dos freqüentadores de um parque ali situado. Uma equipe de pesquisa de rua, contratada para realizar o trabalho, elaborou questões a fim de reunir as informações procuradas. Numa manhã de quarta-feira, 20 pessoas foram entrevistadas e cada uma respondeu a questões para identificar sexo, idade (arredondada para o inteiro mais próximo), número de vezes que freqüenta o parque por semana, estado civil, meio de transporte utilizado para chegar ao parque, tempo de permanência no parque e renda familiar mensal. Os resultados são mostrados na tabela a seguir:

Sexo	Idade	Freqüência semanal	Estado civil	Meio de transporte	Tempo de permanência	Renda familiar mensal (em salário mínimo)
Masculino	26	2	casado	carro	30 min	13,3
Masculino	23	1	solteiro	ônibus	35 min	11,8
Feminino	41	5	viúva	a pé	2h50min	8,9
Masculino	49	3	separado	a pé	45 min	13,9
Feminino	19	5	solteira	carro	1 h	11,6
Feminino	20	4	solteira	a pé	1h20min	16,0

Sexo	Idade	Freqüência semanal	Estado civil	Meio de transporte	Tempo de perma-nência	Renda familiar mensal (em salário mínimo)
Masculino	27	3	solteiro	carro	45 min	19,5
Masculino	38	3	casado	a pé	2h15min	9,3
Masculino	27	2	separado	ônibus	1h30min	10,2
Feminino	50	7	casada	a pé	45 min	12,4
Masculino	52	2	solteiro	a pé	1h40min	10,7
Feminino	48	4	casada	a pé	1h15min	14,7
Masculino	28	4	casado	a pé	1 h	16,6
Masculino	36	1	casado	carro	1h30min	12,5
Feminino	31	3	solteira	ônibus	2 h	8,2
Masculino	56	3	viúvo	a pé	30 min	15,4
Feminino	41	6	solteira	carro	2h30min	18,8
Masculino	44	1	casado	ônibus	50 min	12,1
Feminino	29	2	separada	a pé	40 min	5,0
Masculino	31	3	casado	ônibus	2h45min	7,6

Cada um dos aspectos investigados — os quais permitirão fazer a análise desejada — é denominado *variável*.

Algumas variáveis, como sexo, estado civil e meio de transporte utilizado para chegar ao parque apresentam como resposta um atributo, qualidade ou preferência do entrevistado. Variáveis dessa natureza recebem o nome de *variáveis qualitativas*. Se considerarmos, por exemplo, a variável meio de transporte utilizado, dizemos que *carro*, *ônibus* e *a pé* correspondem às realizações ou valores assumidos por essa variável.

Outras variáveis, como idade, freqüência semanal, tempo de permanência e renda familiar mensal apresentam como resposta um número. Variáveis desse tipo são denominadas *variáveis quantitativas*. Podemos classificá-las em dois grupos:

- *Variáveis quantitativas discretas*: são aquelas cujos valores são obtidos por *contagem* e representados por elementos de um conjunto finito ou enumerável. No exemplo, a variável freqüência semanal é discreta, e seus valores são 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.

- *Variáveis quantitativas contínuas*: são aquelas cujos valores são obtidos por *mensuração* e representados por valores pertencentes a um intervalo *real*. As variáveis idade, tempo de permanência e renda familiar mensal são contínuas e seus valores se distribuem em determinado intervalo real. A variável tempo de permanência, por exemplo, tem seus valores (em horas) pertencentes ao intervalo [0,5; 3[.

EXERCÍCIOS

255. Ao se cadastrar em um *site* de comércio eletrônico, o usuário deve preencher um questionário com estas oito perguntas:

1. Você tem computador em casa?
2. Quantas vezes por semana você acessa a Internet?
3. Numa escala de zero a 10, qual seu índice de confiança na segurança do comércio eletrônico?
4. Quantos cartões de crédito você possui?
5. A residência em que vive é própria ou alugada?
6. Qual é o provedor que você utiliza para acessar a rede?
7. Qual é o tempo médio de acesso à Internet?
8. Já comprou algum produto via Internet?

Cada uma das questões anteriores define uma variável. Classifique-as como qualitativas ou quantitativas.

256. Num cursinho pré-vestibular, os estudantes inscritos responderam a um questionário no qual constavam, entre outras, as seguintes questões:

1. Qual é a área da carreira universitária pretendida?
2. Você cursou o ensino médio em escola particular ou pública?
3. Qual é a renda familiar mensal?
4. Qual é o grau de escolaridade do chefe da família?
5. Qual é a sua disciplina favorita?
6. Quantas vezes você já fez cursinho?
7. Você é usuário da Internet?
8. Quanto tempo de estudo diário pretende dedicar ao cursinho?

Em relação às variáveis definidas pelas questões acima, responda:

a) Quantas são classificadas como qualitativas?
b) Dê três possíveis realizações da variável definida pela questão 4.

257. Uma pesquisa realizada na plataforma de embarque de um terminal rodoviário tinha como objetivo conhecer o perfil do usuário dos fins de semana. Os 200 entrevistados responderam às seguintes questões:

1. Qual seu estado civil?
2. Você possui veículo próprio?
3. Quantas vezes por mês você utiliza este terminal?
4. Qual é a principal razão desta viagem: lazer, negócios ou visita à família?
5. Qual é, aproximadamente, o tempo de viagem até o destino final?
6. Em relação aos serviços deste terminal, você está: satisfeito, parcialmente satisfeito ou insatisfeito?
7. Qual é a quantia mensal que você costuma gastar neste terminal (incluindo passagens, alimentação, entretenimento, etc.)?

Classifique cada uma das variáveis determinadas por essas questões.

III. Tabelas de freqüência

A simples leitura dos dados brutos da tabela anteriormente apresentada não nos fornece as condições necessárias à determinação do perfil do freqüentador do parque, uma vez que as informações não estão devidamente organizadas.

O primeiro procedimento que possibilita uma leitura mais resumida dos dados é a construção de tabelas de freqüência.

Para cada variável estudada, contamos o número de vezes que ocorre cada um de seus valores (ou realizações). O número obtido é chamado *freqüência absoluta* e é indicado por n_i (cada valor assumido pela variável aparece um determinado número de vezes, o que justifica o uso do índice *i*). Vejamos:

• Dos 20 entrevistados, encontramos os seguintes resultados para a freqüência absoluta dos valores assumidos pela variável estado civil:

• separado ($n_1 = 3$);
• solteiro ($n_2 = 7$);
• casado ($n_3 = 8$);
• viúvo ($n_4 = 2$).

Note que:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \sum_{i=1}^{4} n_i = 20$$

Em geral, quando os resultados de uma pesquisa (ou estudo) são divulgados em jornais e revistas, os valores referentes à freqüência absoluta aparecem acompanhados do *número total* de valores colhidos, a fim de tornar a análise mais significativa.

Poderíamos, por exemplo, repetir a pesquisa do parque algum tempo depois e construir uma amostra com 30 entrevistados em vez dos 20 participantes da pesquisa inicial. Para comparar os resultados obtidos nas duas amostras seria preciso levar em conta que elas têm "tamanhos" diferentes.

Definimos, então, para cada valor assumido por uma variável, a *freqüência relativa* (f_i) como a razão entre a freqüência absoluta (n_i) e o número total de dados (*n*), isto é:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Observações

1ª) Como $n_i \leq n$, segue que, para cada *i*, $0 \leq f_i \leq 1$. Por esse motivo, é comum a freqüência relativa ser expressa em porcentagem.

2ª) A soma das freqüências relativas dos valores assumidos por determinada variável é sempre igual a 1.

De fato:

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_i n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

Exemplo

Para a variável estado civil da tabela anteriormente apresentada, construímos a seguinte tabela de freqüência:

Estado civil	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem (%)
Separado	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	15
Solteiro	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35
Casado	8	$\frac{8}{20} = 0{,}40$	40
Viúvo	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$	10
Total	**20**	**1,0**	**100**

A construção das tabelas de freqüência para as variáveis sexo, freqüência semanal de visita ao parque e meio de transporte utilizado é análoga.

Em alguns casos, porém, pode ocorrer que os valores assumidos por uma variável pertençam a determinado intervalo real, não havendo praticamente repetição (coincidência) de valores. Isso ocorre com as variáveis idade, tempo de permanência no parque e renda familiar mensal. Esta última tem seus valores variando no intervalo [5, 20[. Nesse caso, construímos uma tabela de freqüência em que os dados estarão agrupados em classes (ou intervalos) de valores.

Observações

1ª) Vamos convencionar que cada intervalo construído é fechado à esquerda e aberto à direita, isto é, a notação a ⊢ b refere-se ao intervalo real [a, b[, que inclui *a* e não inclui *b*, isto é:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

2ª) A amplitude do intervalo a ⊢ b é dada pela diferença b − a. (No exemplo que será fornecido a seguir, a amplitude de cada uma das classes da renda familiar é igual a 3.)

3ª) Não há regras fixas para a construção dos intervalos usados para agrupar as informações a partir dos dados brutos. Dependendo da natureza dos dados, podemos ter um número maior ou menor de classes. Recomenda-se, no entanto, sempre que possível, construir classes de *mesma amplitude*. Além disso, convém evitar classes de amplitude muito grande ou muito pequena, a fim de que a análise não fique comprometida.

Exemplos

1º) Considerando a variável renda mensal familiar, é possível agrupar os dados brutos nas seguintes classes:

Renda familiar mensal (em salários mínimos)	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem (%)
5 ⊢ 8	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
8 ⊢ 11	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	25
11 ⊢ 14	7	$\frac{7}{20} = 0,35$	35
14 ⊢ 17	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20
17 ⊢ 20	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
Total	**20**	**1,0**	**100**

2º) Para a variável tempo de permanência no parque, construímos uma tabela de freqüência em que as informações estão agrupadas em intervalos de amplitude igual a 30.

Tempo de permanência (em minutos)	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem (%)
30 ⊢ 60	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40
60 ⊢ 90	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20
90 ⊢ 120	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	15
120 ⊢ 150	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
150 ⊢ 180	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	15
Total	**20**	**1,0**	**100**

A leitura da tabela permite concluir que:

- a maioria (60% dos entrevistados) permanece menos de 90 minutos no parque;
- três em cada quatro entrevistados ficam no parque por menos de duas horas (note que 40% + 20% + 15% = 75%).

EXERCÍCIOS

Os exercícios 258 a 260 referem-se à situação da tabela apresentada nas páginas 79 e 80.

258. Construa uma tabela de freqüência para a variável sexo.

259. Construa uma tabela de freqüência para a variável freqüência semanal de visita ao parque.

260. Com os dados referentes à idade agrupados em classes de intervalo, cada um com amplitude igual a 10, construa uma tabela de freqüência.

261. Em uma pesquisa socioeconômica sobre itens de conforto, perguntou-se a cada um dos 800 entrevistados: Quantos aparelhos de TV em cores há em sua casa? Os resultados aparecem na tabela:

Nº de aparelhos	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
0	20	▲	▲
1	▲	▲	▲
2	▲	0,6	▲
3	▲	▲	7,5
4	30	▲	▲

a) Complete a tabela.

b) Suponha que levantamentos posteriores mostraram que os resultados dessa amostra representam, em termos da freqüência relativa, a distribuição do número de aparelhos de TV de toda a população. No universo de 680 000 domicílios, qual o número daqueles em que há exatamente 1 aparelho?

262. Os dados seguintes referem-se ao tempo de espera (em minutos) de 30 clientes em uma fila de banco, em um dia de grande movimento:

23 — 19 — 7 — 21 — 16 — 13 — 11 — 16 — 33 — 22

17 — 15 — 12 — 18 — 25 — 20 — 14 — 16 — 12 — 10

8 — 20 — 16 — 14 — 19 — 23 — 36 — 30 — 28 — 35

Construa uma tabela de freqüência, agrupando as informações em classes de amplitude igual a 5, a partir do menor tempo encontrado.

263. A tabela abaixo informa os tipos de lazer preferidos por 80 garotos da 1ª série do ensino médio de um colégio.

Lazer	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
Jogar futebol com os amigos	48	a
Computador e *videogame*	b	c
Paquerar no *shopping*	d	e
Viajar para a praia	f	g
Total	**80**	**1,00**

Complete a tabela, sabendo que c é o dobro de e, que é o quíntuplo de g.

264. Vinte e cinco jovens de até 15 anos foram selecionados para participar de um programa desenvolvido pela Secretaria de Esportes de uma cidade cujo objetivo consiste na formação de futuros jogadores de vôlei. As alturas dos jovens (em metro) são dadas a seguir:

1,82 — 1,77 — 1,79 — 1,74 — 1,73 — 1,81 — 1,82 — 1,69 — 1,71

1,78 — 1,78 — 1,88 — 1,72 — 1,65 — 1,75 — 1,78 — 1,73

1,82 — 1,84 — 1,74 — 1,76 — 1,79 — 1,83 — 1,76 — 1,70

a) A partir da menor altura encontrada, agrupe os dados em classes de amplitude 5 cm e faça a tabela de freqüência correspondente.

b) Em visita ao centro de treinamento, um técnico estrangeiro sugeriu que pelo menos 48% do jovens deveriam ter estatura superior ou igual a 1,80 m. Quantos jovens nessas condições devem ser incorporados ao atual grupo, de acordo com tal sugestão? Use os dados agrupados no item a.

265. A tabela seguinte informa os valores de 160 empréstimos solicitados a um banco por pessoas físicas durante uma semana.

Valor do empréstimo (em R$)	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
200 ⊢ 400	a	b
400 ⊢ 600	60	c
600 ⊢ 800	d	e
800 ⊢ 1 000	f	0,05
1 000 ⊢ 1 200	g	h
Total	**160**	**1,00**

Complete a tabela, sabendo que 52,5% dos empréstimos representavam valores maiores ou iguais a R$ 600,00 e que, entre eles, $\frac{2}{3}$ eram inferiores a R$ 800,00.

266. (UF-GO) A tabela abaixo foi extraída da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio/2001 do IBGE. Ela mostra as classes de rendimento mensal no Estado de Goiás e o número de pessoas de 10 anos ou mais de idade em cada classe.

Classe de rendimento mensal	Pessoas de 10 anos ou mais de idade		
	Total	Homens	Mulheres
Total	4 141 696	2 005 447	2 136 249
Até $\frac{1}{2}$ salário mínimo	210 438	62 010	148 428
Mais de $\frac{1}{2}$ a 1 salário mínimo	696 875	299 431	397 444
Mais de 1 a 2 salários mínimos	816 385	498 301	318 084
Mais de 2 a 3 salários mínimos	354 673	251 875	102 798
Mais de 3 a 5 salários mínimos	257 695	172 865	84 830
Mais de 5 a 10 salários mínimos	186 355	125 954	60 401
Mais de 10 a 20 salários mínimos	75 830	55 911	19 919
Mais de 20 salários mínimos	41 446	33 409	8 037
Sem rendimento	1 501 999	505 691	996 308

Analise essa tabela e julgue os itens a seguir:

1) O número de pessoas que ganham mais de 5 salários mínimos é inferior a 8% do total de pessoas.
2) A razão entre o número de mulheres e de homens que ganham até 1 salário mínimo é maior que a razão entre o número de mulheres e de homens com rendimento superior a 1 salário mínimo.
3) Mais de 60% das pessoas sem rendimento são mulheres.
4) Mais da metade das pessoas não possuem rendimento ou ganham até 1 salário mínimo.

IV. Representação gráfica

Os gráficos constituem um importante instrumento de análise e interpretação de um conjunto de dados.

Diariamente é possível encontrar representações gráficas nos mais variados veículos de comunicação (jornais, revistas, televisão, Internet), associadas a assuntos diversos do nosso dia-a-dia, como resultados de pesquisas de opinião, saúde e desenvolvimento humano, economia, esportes, cidadania, etc.

A importância dos gráficos está ligada sobretudo à facilidade e rapidez na absorção e interpretação das informações por parte do leitor e também às inúmeras possibilidades de ilustração e resumo dos dados apresentados.

Estudaremos, neste capítulo, quatro tipos de representações gráficas: o gráfico de setores (ou "pizza"), o gráfico de barras (verticais ou horizontais), o histograma e o gráfico de linhas (poligonal).

Em relação aos tipos de gráficos citados, trabalharemos nos itens V a VIII com sua construção, leitura e interpretação. É importante destacar que esses gráficos podem ser feitos utilizando-se planilhas ou *softwares* estatísticos.

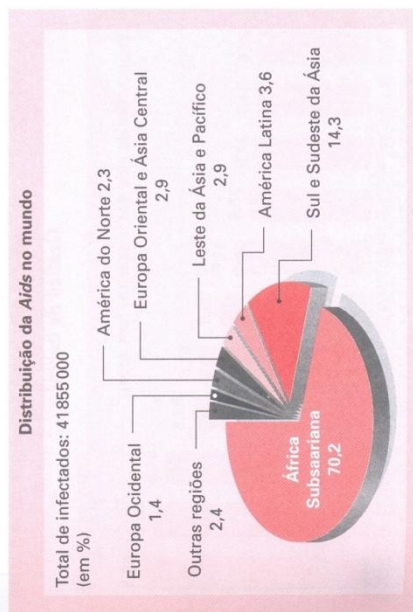
Gráfico de setores

Fonte: *Almanaque Abril* — atualidades de vestibular, 2004.

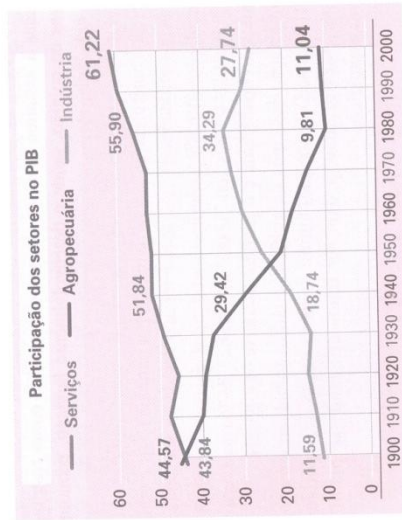
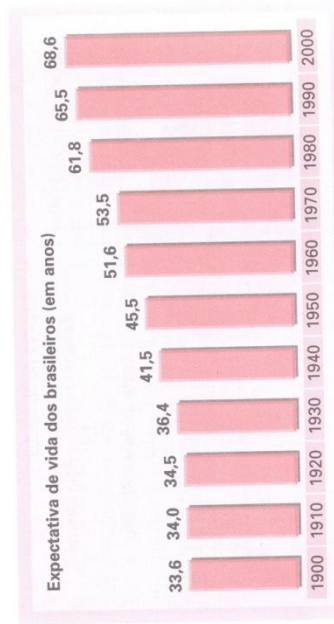
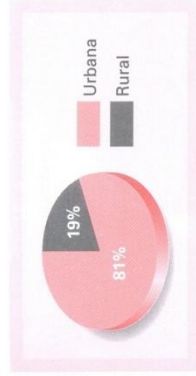
Gráfico poligonal

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 30/9/2003.

Gráfico de barras

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 30/9/2003.

V. Gráfico de setores

O gráfico seguinte informa a distribuição da população brasileira que vive no campo (zona rural) e nas cidades (zona urbana).

Fonte: *Veja*, 2/7/2003.

Para representar essa distribuição, dividimos um círculo em duas partes (setores circulares), uma com ângulo de medida proporcional à porcentagem da população rural e outra com ângulo de medida proporcional à porcentagem da população urbana.

Temos, então, a seguinte proporção:

- população rural:

$$\left.\begin{array}{l} 100\% \text{ ——— } 360° \\ 19\% \text{ ——— } x \end{array}\right\} x = 68{,}4°$$

- população urbana:

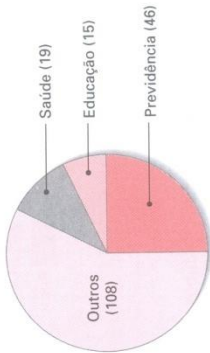
$$\left.\begin{array}{l} 100\% \text{ ——— } 360° \\ 81\% \text{ ——— } y \end{array}\right\} y = 291{,}6°$$

(Poderíamos simplesmente fazer também: $360° - 68{,}4° = 291{,}6°$.)

Com o auxílio de um transferidor, construímos o gráfico acima, que é chamado de *gráfico de setores* ou de "pizza".

De modo geral, quando uma variável assume k valores distintos, dividimos um círculo em k setores circulares cujas medidas dos ângulos são proporcionais às freqüências correspondentes a cada um desses valores.

EXERCÍCIOS

267. (Vunesp-SP) O gráfico, publicado pela revista *Veja* de 28/7/1999, mostra como são divididos os 188 bilhões de reais do orçamento da União entre os setores de saúde, educação, previdência e outros.

Fonte: *Veja*, 28/7/1999.

Se os 46 bilhões de reais gastos com a previdência fossem totalmente repassados aos demais setores, de modo que 50% fossem destinados à saúde, 40% à educação e os 10% restantes aos outros, determine o aumento que o setor de saúde teria:

a) em reais;

b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente.

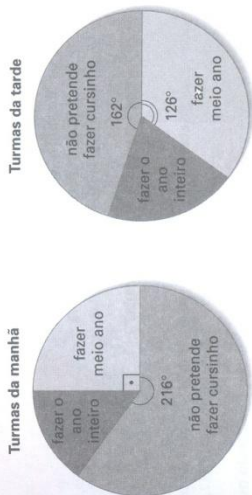
268. Uma pesquisa realizada com 800 pessoas às vésperas de um feriado prolongado tinha como pergunta principal: "O que você pretende fazer nesses quatro dias?". Os resultados são dados na tabela seguinte:

Intenção	Número de pessoas
Descansar em casa	240
Viajar	360
Passear na própria cidade	160
Trabalhar	40

Faça um gráfico de setores para representar esses resultados.

269. Os gráficos seguintes mostram a disposição dos alunos das turmas da 3ª série do ensino médio para fazer cursinho pré-vestibular paralelamente a freqüentar as aulas do colégio.

Turmas da manhã

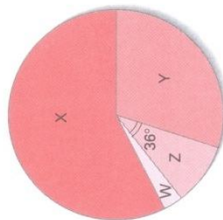
fazer o ano inteiro
fazer meio ano
216°
não pretende fazer cursinho

Sabendo que as turmas da manhã contam com 340 alunos e as da tarde com 280 alunos, determine:

a) o número total de alunos que não pretendem fazer cursinho;

b) a diferença entre o número de alunos do vespertino e do matutino que pretendam fazer cursinho o ano inteiro.

270. Em uma cidade, o mercado de leite é disputado por quatro marcas: *X*, *Y*, *Z* e *W*.

Os resultados de uma sondagem a propósito da marca preferida, realizada com 400 consumidores, estão parcialmente apresentados na tabela e no gráfico seguintes.

Marca de preferência	Freqüência absoluta
X	230
Y	120
Z	▲
W	▲

Determine:

a) a diferença entre o número de consumidores que preferem *Z* a *W*;

b) a diferença entre os ângulos correspondentes a *X* e *Y*.

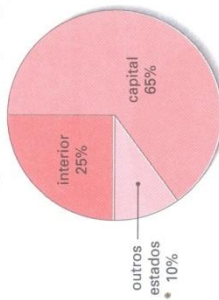
271. Uma psicóloga realizou com os alunos da 1ª série do ensino médio de um colégio um estudo sobre orientação profissional. Após algumas dinâmicas e entrevistas, condensou as informações sobre a intenção de carreira dos alunos no gráfico ao lado.

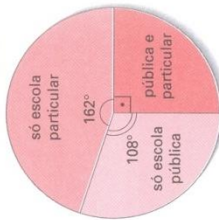
Humanas 40%
Biológicas 35%
Exatas 25%

Quando os mesmos alunos estavam na 3ª série, a psicóloga repetiu o estudo com eles e notou que, em relação à sondagem anterior, $\frac{5}{16}$ dos interessados em Humanas migraram para Exatas e $\frac{3}{40}$ para Biológicas. Admitindo que não haja outras migrações:

a) construa o novo gráfico de setores correspondente, destacando os ângulos;
b) determine quantos alunos migraram de Humanas para Exatas, sabendo que o número dos participantes da dinâmica foi 400.

272. Uma universidade realizou um levantamento sobre a origem dos 4 800 novos alunos ingressantes. Os dados encontram-se resumidos nos gráficos seguintes:

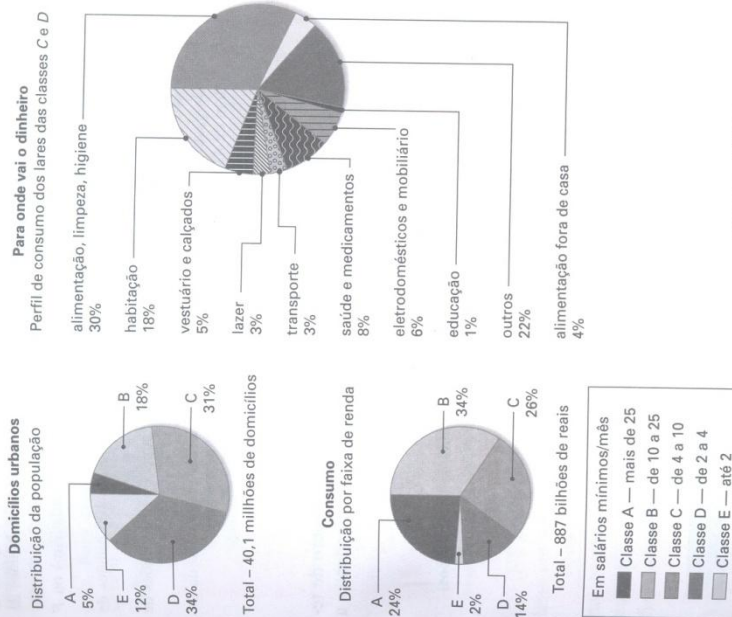
Distribuição dos calouros por região

Distribuição dos alunos da capital por tipo de escola freqüentada

só escola particular
162°
108°
só escola pública
pública e particular

Com base nos gráficos, responda:

a) Qual é o número de calouros procedentes do interior?
b) Qual é o número de alunos da capital que estudaram no dois tipos de escola (pública e particular)?
c) Qual é a porcentagem de calouros que estudaram em escolas particulares da capital?
d) Qual é o número de calouros que já freqüentaram a escola pública na capital?

273. Observe os gráficos a seguir e faça o que se pede.

Para onde vai o dinheiro
Perfil de consumo dos lares das classes C e D

alimentação, limpeza, higiene 30%
habitação 18%
vestuário e calçados 5%
lazer 3%
transporte 3%
saúde e medicamentos 8%
eletrodomésticos e mobiliário 6%
educação 1%
outros 22%
alimentação fora de casa 4%

Fonte: *Exame*, 1/10/2003.

a) Complete as afirmações corretamente:
1) As classes A e B juntas, embora representem apenas ▲% do total de domicílios urbanos, detêm ▲% do total consumido pelos brasileiros.
2) O número de domicílios urbanos das classes D e E reunidos é da ordem de ▲ milhões.

3) A classe C é composta de aproximadamente ▲ milhões de domicílios urbanos e está representada no gráfico por um setor de ▲ graus. O consumo correspondente a essa classe gira em torno de ▲ bilhões de reais por ano.

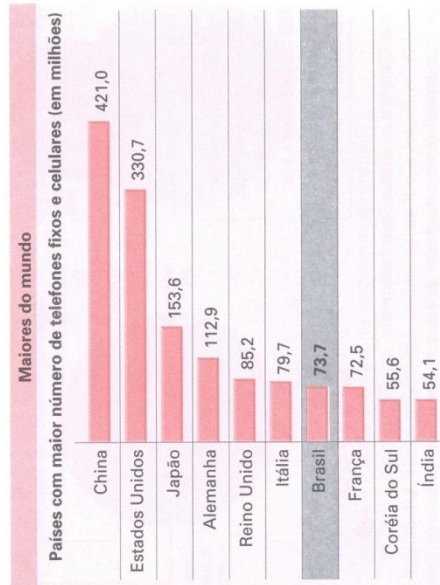
b) Em relação ao consumo das classes C e D, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) em cada item e justifique a classificação:

1) Alimentação, limpeza e higiene movimentam mais de 100 bilhões de reais por ano.

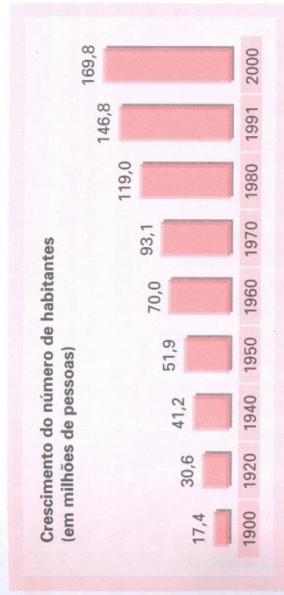
2) O total de gastos com saúde e medicamentos supera os 30 bilhões de reais por ano.

3) Os gastos com lazer de um único domicílio dessas classes são da ordem de 410 reais por ano.

VI. Gráfico de barras

O gráfico abaixo relaciona os países onde há maior número de telefones (fixos e celulares, somados) e as quantidades correspondentes a cada um.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 6/7/2003.

Ao lado do nome de cada país há uma barra cujo comprimento é *proporcional* ao número de telefones. Nessa escala, cada centímetro equivale a aproximadamente 70 milhões de telefones.

Esse tipo de gráfico recebe o nome de *gráfico de barras horizontais*. Para construí-lo, basta estabelecer uma escala conveniente para definir o tamanho da barra a ser usada para representar a freqüência de cada ocorrência da variável em estudo.

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 30/9/2003.

No gráfico acima está representado o aumento da população brasileira em um século.

A cada ano corresponde uma coluna cujo comprimento é proporcional ao número de habitantes. Na escala utilizada, cada meio centímetro equivale a aproximadamente 35 milhões de habitantes. Esse tipo de gráfico é chamado de *gráfico de barras verticais*.

EXERCÍCIOS

274. O funcionário da bilheteria de um estádio de futebol classificou durante quinze minutos os torcedores que compareceram ao jogo segundo o critério: pagante (P), convidado (C) e menor com acompanhante (M).

Os dados brutos são apresentados a seguir:

P — P — P — P — C — P — M — M — M — P — P — P — P — P

C — P — P — P — M — M — C — M — P — P — P — P — C — P

C — C — P — P — P — P — M — C — C — P — P — P

Faça um gráfico de barras horizontais para representar a distribuição percentual do público registrado pelo funcionário.

275.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 2/3/2003.

Considerando o gráfico, assinale *V* (verdadeira) ou *F* (falsa) nas afirmações, justificando as falsas:

a) A participação dos carros populares vem sempre aumentando, desde 1993.

b) Sabe-se que em 1999 foram comercializados, no Brasil, 1,2 milhão de veículos. Assim, o número de carros populares comercializados no país foi 650 mil.

c) A participação dos carros populares correspondeu, no mínimo, à metade dos veículos comercializados nesse período, exceto nos três primeiros anos.

276. (FGV-SP) No gráfico ao lado está representado, no eixo das abscissas, o número de fitas de vídeo alugadas por semana numa videolocadora e, no eixo das ordenadas, a correspondente freqüência (isto é, a quantidade de pessoas que alugaram o correspondente número de fitas).

frequência: 0 5 10 15 20 25 30
número de fitas: 1 2 3 4 5 6

a) Qual a porcentagem de pessoas que alugaram 4 ou mais fitas?

b) Se cada fita é alugada por R$ 4,00, qual a receita semanal da videolocadora?

277. Considerando os dois gráficos apresentados, responda às perguntas a seguir:

a) Onde é mais caro falar ao telefone?

b) Qual é o valor da conta telefônica de um usuário que conversou 1 hora em um mês na França? E na Argentina?

c) Caso a tarifa telefônica local no Brasil aumente 150% e a da França não sofra alterações, a partir de quantos minutos mensais de uso de telefone a conta no Brasil passa a ser mais cara que a conta na França?

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 26/5/2003.

278. Cosiderando o gráfico, faça o que se pede.

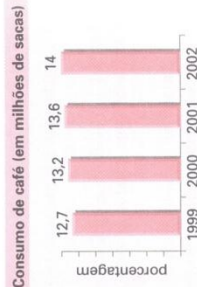
Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 26/6/2003.

a) Determine a ordem de grandeza do número total de quilômetros quadrados desmatados no período.

b) Determine a quantos campos de futebol de 100 m de comprimento e 70 m de largura corresponde o total desmatado calculado no item *a*.

c) Houve um período de anos consecutivos em que foi registrada pequena variação na área desmatada. Identifique-o.

d) Sabendo que a área da Amazônia Legal é da ordem de 4,9 milhões de quilômetros quadrados, determine o percentual correspondente à área da floresta desmatada em todo o período.

279. (UF-PE) O consumo anual de café em estabelecimentos comerciais no Brasil, de 1999 a 2002, está ilustrado no gráfico ao lado.

Admitindo esses dados, analise as alternativas a seguir, justificando:

a) O consumo cresceu linearmente de 2000 a 2002.

b) Entre 2000 e 2002 o crescimento percentual foi superior a 6%.

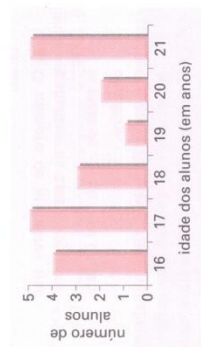
c) O crescimento percentual em 2001 foi igual ao crescimento percentual em 2002 (crescimento relativo ao ano anterior).

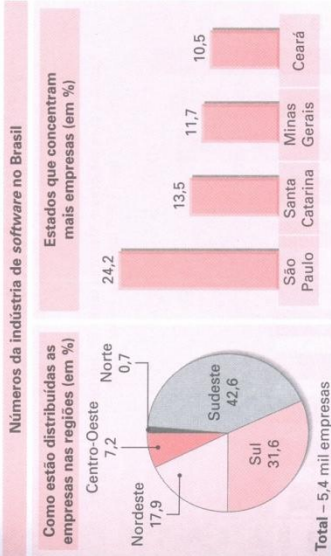
d) Em 2001 o crescimento percentual (em relação a 2000) foi inferior a 4%.

e) A média anual de consumo foi superior a 13 milhões de sacas.

280. (Vunesp-SP) Num curso de Inglês, a distribuição das idades dos alunos é dada pelo gráfico ao lado.
Com base nos dados do gráfico, determine:

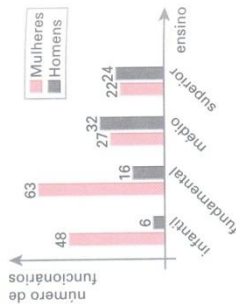
a) o número total de alunos do curso e o número de alunos com no mínimo 19 anos;

b) escolhido um aluno ao acaso, qual a probabilidade de sua idade ser no mínimo 19 anos ou ser exatamente 16 anos.

281. Considerando o gráfico, responda às perguntas a seguir.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 12/5/2003.

a) Qual a medida aproximada do ângulo do setor que representa cada região?

b) Que número representa as empresas de *software* instaladas no Sudeste?

c) Qual a participação percentual de Santa Catarina e São Paulo na região em que cada Estado se situa?

282. O gráfico ao lado mostra a distribuição dos funcionários de uma escola integrada (que oferece cursos desde o ensino infantil até o ensino superior) por ensino e por sexo. Com base no gráfico, assinale *V* (verdadeira) ou *F* (falsa) nas proposições seguintes e justifique as falsas:

a) O número de mulheres que trabalham na escola representa mais de $\frac{2}{3}$ do total de funcionários.

b) O número de homens que trabalham na faculdade supera o número total de homens que trabalham no ensino infantil e fundamental.

c) No ensino fundamental os homens correspondem a menos de 15% do total de funcionários.

d) O número de mulheres que trabalham no ensino fundamental é 150% maior que o número de mulheres que trabalham no ensino médio.

e) Para que as mulheres representem mais de 55% dos funcionários que trabalham no ensino médio é necessário contratar pelo menos mais 11 funcionárias. (Admita que não haverá saída de nenhum funcionário.)

283. Considerando o gráfico, classifique cada afirmação como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

a) A mortalidade infantil em Alagoas supera a mortalidade infantil verificada nos Estados da região Sul, juntos.

b) Uma queda de 20% na taxa de mortalidade infantil da Paraíba reduz essa taxa a menos de 50 mortes por 1 000 nascidos vivos.

c) A taxa de mortalidade infantil do Ceará é aproximadamente o triplo da de São Paulo.

d) A taxa de mortalidade infantil de Pernambuco, expressa em termos percentuais, é maior que 6%.

284. Na tabela abaixo estão relacionados os 30 municípios brasileiros que atingiram os maiores índices de desenvolvimento humano municipal (IDHM), de acordo com o censo de 2000.

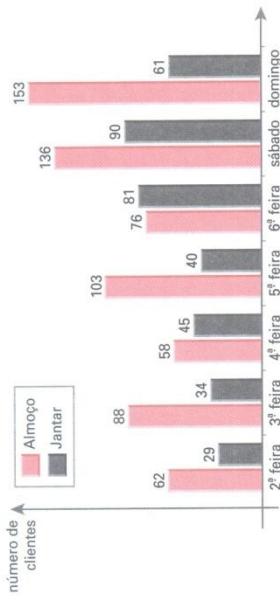
	Municípios	IDHM		Municípios	IDHM
1º	São Caetano do Sul (SP)	0,919	16º	Selbach (RS)	0,856
2º	Águas de São Pedro (SP)	0,908	17º	Curitiba (PR)	0,856
3º	Niterói (RJ)	0,886	18º	Vitória (ES)	0,856
4º	Florianópolis (SC)	0,875	19º	Luzerna (SC)	0,855
5º	Santos (SP)	0,871	20º	Blumenau (SC)	0,855
6º	Bento Gonçalves (RS)	0,870	21º	Ribeirão Preto (SP)	0,855
7º	Balneário Camboriú (SC)	0,867	22º	Lacerdópolis (SC)	0,854
8º	Joaçaba (SC)	0,866	23º	Santana de Parnaíba (SP)	0,853
9º	Porto Alegre (RS)	0,865	24º	Campinas (SP)	0,852
10º	Fernando de Noronha* (PE)	0,862	25º	Ivoti (RS)	0,851
11º	Carlos Barbosa (RS)	0,858	26º	Videira (SC)	0,851
12º	Caxias do Sul (RS)	0,857	27º	Quatro Pontes (PR)	0,851
13º	Joinville (SC)	0,857	28º	Saltinho (SP)	0,851
14º	Vinhedo (SP)	0,857	29º	Veranópolis (RS)	0,850
15º	Jundiaí (SP)	0,857	30º	Jaraguá do Sul (SC)	0,850

*Distrito Estadual

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 3/10/2003

a) Sabendo que o índice do 1º colocado é x% maior que o índice do 2º colocado e y% maior que o índice do 30º colocado, determine x e y.

b) Faça um gráfico de barras para representar o número de municípios pertencentes a cada Estado relacionado na tabela.

285. O gráfico seguinte mostra o número de clientes que uma churrascaria atendeu durante certa semana.

Os preços praticados por esse estabelecimento são:

almoço: de 2ª a 6ª feira → R$ 13,00
sábado e domingo → R$ 18,00
jantar: todos os dias → R$ 12,00

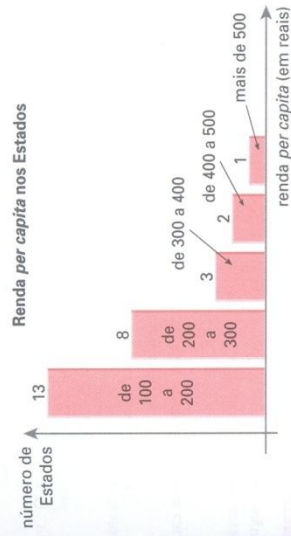
Qual foi o faturamento da churrascaria nessa semana?

VII. Histograma

Na tabela seguinte, extraída do *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, está relacionada a renda *per capita* média em cada Estado (dados do censo de 2000), expressa em reais.

Distrito Federal	605,4	Minas Gerais	276,6	Rio Grande do Norte	176,2
Santa Catarina	348,7	Espírito Santo	289,6	Ceará	156,2
São Paulo	442,7	Amapá	211,4	Acre	180,7
Rio Grande do Sul	357,7	Roraima	232,5	Bahia	160,2
Rio de Janeiro	413,9	Rondônia	233,8	Sergipe	163,5
Paraná	321,4	Pará	168,6	Paraíba	150,2
Mato Grosso do Sul	287,5	Amazonas	173,9	Piauí	129,0
Goiás	286,0	Tocantins	172,6	Alagoas	139,9
Mato Grosso	288,1	Pernambuco	183,8	Maranhão	110,4

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 3/10/2003.

Agrupando esses valores em cinco classes de intervalos — 100 ⊢ 200, 200 ⊢ 300, 300 ⊢ 400, 400 ⊢ 500 e mais de 500 —, é possível construir uma tabela de freqüência. Para representar graficamente essas informações, construímos um gráfico semelhante ao de barras verticais, usando como abscissa os limites das classes de intervalos e como ordenada a freqüência (absoluta ou relativa).

Esse tipo de gráfico é denominado *histograma*.

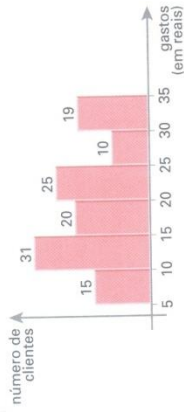
EXERCÍCIOS

286. Os dados seguintes referem-se à participação percentual da indústria na composição do produto interno bruto (PIB) dos Estados brasileiros.

AC	17,4%	DF	11,1%	MT	11,7%	RJ	32%	SE	28,5%
AL	44,7%	ES	30,4%	PA	29,1%	RN	41,9%	SP	41%
AM	41%	GO	21,2%	PB	20,5%	RO	6,6%	TO	4,9%
AP	24%	MA	32%	PE	25,6%	RR	26,3%		
BA	36,7%	MG	41,6%	PI	21,4%	RS	31,4%		
CE	36%	MS	23,6%	PR	36,9%	SC	36,3%		

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

Faça um histograma representativo dessa situação, agrupando os dados em intervalos de amplitude 10.

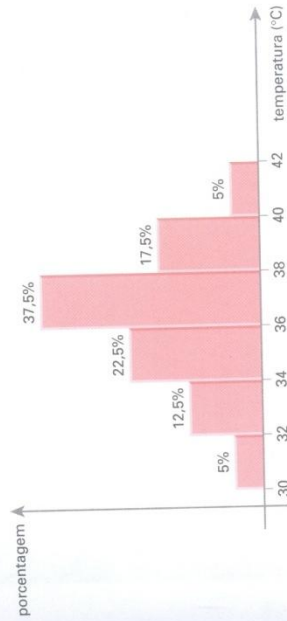
287. O histograma seguinte mostra os gastos dos clientes de um supermercado registrados em um caixa expresso durante uma manhã.

a) Que porcentagem do total de clientes gastou pelo menos 20 reais?
b) Que porcentagem do total de clientes gastou menos de 15 reais?
c) Estime a menor quantia possível que pôde ter sido arrecadada nesse caixa na manhã considerada.

288. O departamento pessoal de uma pequena fábrica relacionou o tempo de serviço e o salário de seus 30 funcionários. Tais dados encontram-se na tabela a seguir.

Funcionário	Tempo de serviço (meses)	Salário (R$)
1	20	832,00
2	16	641,00
3	6	1 105,00
4	7	432,00
5	10	592,00
6	14	617,00
7	18	720,00
8	26	864,00
9	18	803,00
10	16	851,00
11	13	692,00
12	8	1 625,00
13	17	2 143,00
14	21	1 294,00
15	23	967,00

Funcionário	Tempo de serviço (meses)	Salário (R$)
16	9	873,00
17	11	556,00
18	25	831,00
19	5	886,00
20	10	1 427,00
21	13	1 061,00
22	17	1 317,00
23	8	1 248,00
24	19	960,00
25	15	820,00
26	9	749,00
27	7	861,00
28	4	639,00
29	11	603,00
30	15	1 512,00

a) Faça um histograma para representar a distribuição do tempo de serviço dos funcionários, utilizando intervalos de amplitude 4, a partir do menor valor encontrado.
b) Faça um histograma para representar a distribuição dos salários, utilizando intervalos de amplitude 200, a partir do valor 400.
c) Refaça o histograma do item *b*, supondo a contratação de 8 novos funcionários, cada um com salário de R$ 700,00.

289. O histograma seguinte mostra as temperaturas máximas diárias registradas em 80 dias durante um verão na cidade do Rio de Janeiro.

a) Em quantos dias a temperatura máxima manteve-se abaixo dos 38 °C?
b) Em quantos dias a temperatura máxima variou de 36 °C a 42 °C?
c) O dono de uma barraca de praia disse que o carioca costuma tomar 1 litro de cerveja na praia por dia quando a temperatura está abaixo de 32 °C e que, para cada 2 °C de aumento da temperatura, esse consumo sobe 10% (em relação ao consumo anterior). Se um carioca foi à praia nesses 80 dias, quantos litros de cerveja consumiu ao todo, de acordo com essa previsão?

VIII. Gráfico de linhas (poligonal)

O gráfico seguinte mostra a evolução da taxa de desemprego no Brasil no período de 1989 a 2002. A cada ano está associada certa taxa de desemprego.

Desse modo, ficam determinados diversos pontos no gráfico; unindo-os por segmentos de reta, obtemos o chamado *gráfico de linhas* ou *gráfico de curva poligonal*. É importante lembrar que esse tipo de gráfico define uma função entre as variáveis (taxa e anos) envolvidas. Dizemos que a taxa de desemprego é função do tempo.

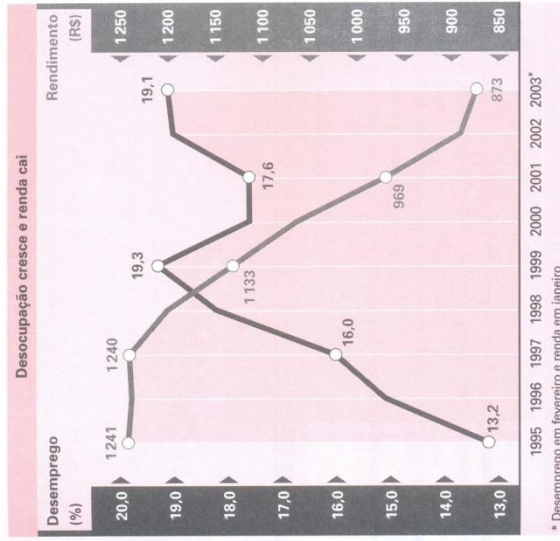
Fonte: *Almanaque Abril* — atualidades de vestibular, 2004.

A leitura do gráfico nos permite concluir que:

- A taxa de desemprego aumentou de 1989 a 1992, teve ligeira queda de 1992 a 1995 e a partir daí cresceu até 1998. De 1998 a 1999, manteve-se praticamente constante, caindo a partir daí até 2001, quando houve retomada de crescimento.
- Nos últimos cinco anos, a taxa de desemprego manteve-se acima de 6% da população economicamente ativa.
- Considerando-se dois anos consecutivos, pode-se dizer que o maior aumento do desemprego ocorreu de 1997 a 1998, com acréscimo de aproximadamente 2 pontos percentuais na taxa.

O gráfico de linhas é muito usado quando se quer representar o comportamento de uma variável cujos valores diminuem ou aumentam no decorrer do tempo de maneira contínua.

EXERCÍCIOS

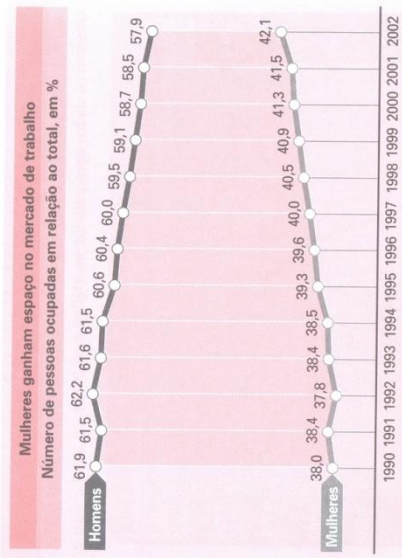
290. Observe os dados apresentados no gráfico e responda.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 28/4/2004.

a) Identifique os períodos de crescimento e decrescimento relativos às duas variáveis constantes no gráfico.

b) Qual foi a perda percentual nos rendimentos no período de 1995 a 2003?

c) Suponha que, em 2003, o total dos rendimentos dos trabalhadores empregados tivesse sido dividido igualmente entre toda a população economicamente ativa a fim de que todos tivessem renda. Quantos reais *a menos* um trabalhador empregado passaria a receber?

291. Observe o gráfico a seguir:

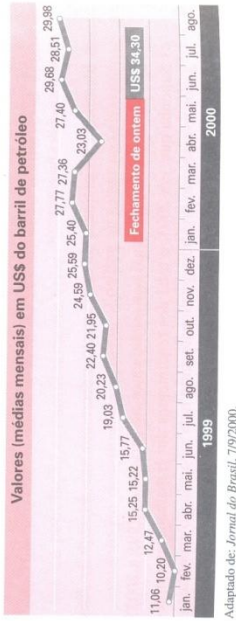
Fonte: *Folha de S.Paulo*, 18/11/2002.

Responda:

a) A partir de que ano é possível afirmar que a participação masculina tornou-se decrescente e a feminina crescente?

b) Em um grupo de 500 000 trabalhadores, no ano de 2001, qual era a diferença entre o número de homens e de mulheres?

c) Em que anos a diferença entre a participação masculina e a feminina não excedeu 20 pontos percentuais? Em que anos ela ultrapassou 23 pontos percentuais?

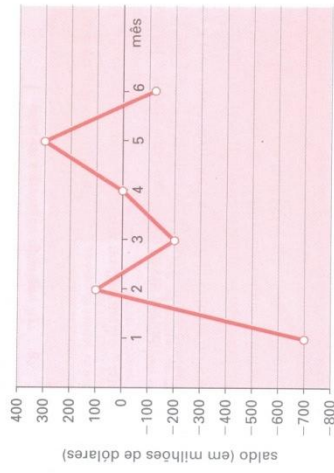
292. (UF-MT, adaptado) Observe a figura:

Adaptado de: *Jornal do Brasil*, 7/9/2000.

A partir das informações dadas e utilizando a aproximação de duas casas decimais, julgue os itens:

0) No período considerado, a variação do menor valor do barril de petróleo para o maior foi de 193,92%.

1) A média aritmética dos valores do barril de petróleo dos meses relativos ao segundo trimestre de 1999 é US$ 15,41.

2) Se a variação (em dólar) do valor do barril de petróleo de julho de 2000 a agosto de 2000 se mantivesse constante para os meses seguintes, o valor do barril ultrapassaria US$ 40,00 em fevereiro de 2001.

293. (UF-AL) O saldo da balança comercial de um país é a diferença entre os valores de suas exportações e importações. O gráfico mostra o saldo da balança comercial brasileira no primeiro semestre de 1999, em números aproximados.

De acordo com o gráfico, assinale *V* ou *F* nas proposições seguintes:

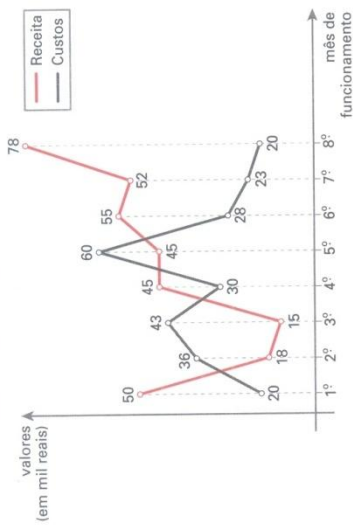
a) O valor das importações superou o das exportações em janeiro.

b) O valor das exportações superou o das importações em março.

c) O valor das exportações do país vem aumentando em 1999.

d) O saldo da balança comercial em junho é de aproximadamente −150 000 dólares.

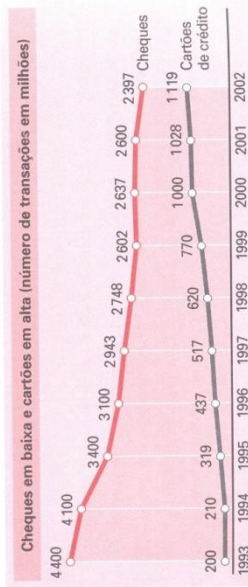
e) O saldo acumulado da balança comercial no primeiro semestre é de aproximadamente −650 000 000 dólares.

294. O gráfico seguinte mostra o desempenho de uma pequena fábrica nos oito primeiros meses de funcionamento:

Com base no gráfico, responda:

a) Em que meses a empresa operou no "vermelho", isto é, os custos superaram a receita?

b) Qual foi a receita total da fábrica nesse período?

c) Faça um gráfico de linhas para representar a evolução do lucro da fábrica mês a mês nesse período; em seguida calcule o lucro total no período.

295. O gráfico abaixo mostra queda nas operações com cheques e o avanço nas operações com cartões de crédito. Os valores referem-se às quantidades de transações efetuadas (em milhões).

Fonte: *Veja*, 10/9/2003.

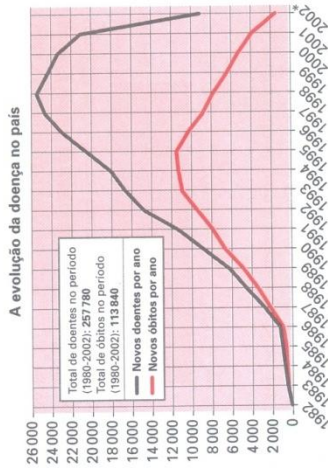
Assinale *V* (verdadeira) ou *F* (falsa) nas afirmativas seguintes, justificando as falsas:

a) As transações efetuadas com cartões aumentaram a cada ano no período considerado.

b) De 1993 a 2002 registrou-se queda de aproximadamente 45% nas transações efetuadas com cheques.

c) O crescimento percentual das transações com cartões aumentou 560% no período de 1993 a 2002.

d) Considerando os dados de 2001 e 2002, pode-se dizer que a queda percentual nas operações com cheques correspondeu ao ganho percentual nas operações com cartões, com uma margem de erro de até 2 pontos percentuais.

296. Segundo o *Almanaque Abril* — atualidades de vestibular, de 2004, graças "a uma eficiente campanha de combate à Aids, que incluiu a distribuição gratuita de remédios, o Brasil conseguiu domar a epidemia e seu programa se tornou um exemplo para a comunidade mundial." Com base no gráfico sobre a evolução da doença no país apresentado pela publicação, faça o que se pede.

Fonte: *Almanaque Abril* — atualidades de vestibular, 2004.

a) Identifique os períodos de crescimento e decrescimento das variáveis em estudo.

b) Faça uma estimativa do número total de óbitos dos últimos cinco anos.

c) A queda na mortalidade por Aids deve-se principalmente à distribuição gratuita de coquetéis anti-retrovirais aos infectados. De acordo com o gráfico, a partir de que ano teve início esse programa?

d) A partir de que ano houve queda tanto no número de novos casos como no número de óbitos?

IX. Medidas de centralidade e variabilidade

Nos itens anteriores, vimos como resumir um conjunto de dados em tabelas de freqüência e também como representá-los graficamente.

Agora, a partir dos valores assumidos por uma variável quantitativa, vamos estabelecer medidas correspondentes a um resumo da distribuição de tais valores.

Estabeleceremos um valor *médio* ou *central* e um valor indicativo do grau de *variabilidade* ou *dispersão* em torno do valor central.

Como valores centrais, vamos estudar a *média*, a *mediana* e a *moda*.

Como medida da variabilidade, vamos estudar a *variância*, o *desvio padrão* e o *desvio médio*.

X. Média aritmética

Seja x uma variável quantitativa e $x_1, x_2, ..., x_n$ os valores assumidos por x. Define-se a *média aritmética* de x — indicada por $\bar{x}$ — como a divisão da soma de todos esses valores pelo número de valores, isto é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Exemplos

1º) Um aluno, preparando-se para o exame vestibular, fez 12 simulados no cursinho ao longo do ano. Em cada simulado, o número de questões era oitenta. Os valores seguintes correspondem às pontuações obtidas nesses exames:

56 — 52 — 61 — 53 — 48 — 68

49 — 59 — 61 — 62 — 60 — 55

Qual é a média aritmética desses valores?

Temos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{56 + 52 + ... + 60 + 55}{12} = \frac{684}{12} = 57$$

A nota média obtida por esse aluno é 57 pontos. Qual é o significado desse valor?

Caso o aluno apresentasse a mesma pontuação (desempenho) em todos os simulados, essa pontuação deveria ser 57 pontos a fim de que fosse obtida a pontuação total de 684 pontos, equivalente à soma dos pontos obtidos efetivamente nas 12 provas.

Observe que em nenhum simulado ocorreu a pontuação média, que é 57 pontos.

Isso sugere que, ao calcularmos a média aritmética de um conjunto de valores, podemos obter um resultado que não coincide com nenhum dos valores que a variável assume.

2º) A média aritmética de um conjunto formado por 10 elementos é igual a 8. Acrescentando-se a esse conjunto o número 41, qual será a nova média?

Sejam $x_1, x_2, ..., x_{10}$ os elementos desse conjunto.

Temos:

$$\bar{x} = 8 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 8 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 80$$

Ao acrescentarmos o número 41 ao conjunto, a soma de todos os seus elementos será 80 + 41 = 121 e a nova média ($\bar{x}'$) será dada por:

$$\bar{x}' = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right) + 41}{10 + 1} = \frac{80 + 41}{11} = 11$$

Propriedades

Vamos estudar agora duas propriedades da média aritmética.

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os valores assumidos por uma variável x e $\bar{x}$ a média aritmética correspondente.

Se a cada x_i (i = 1, 2, ..., n) adicionarmos uma constante real c, a média aritmética fica adicionada de c unidades.

Essa propriedade pode ser facilmente demonstrada.

Consideremos que os novos valores assumidos por essa variável sejam: $x_1 + c, x_2 + c, ..., x_n + c$.

A nova média ($\overline{x}'$) é dada por:

$$\overline{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + c)}{n} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + ... + (x_n + c)}{n} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n} + \frac{\overbrace{(c + c + ... + c)}^{n \text{ vezes}}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n \cdot c}{n}$$

isto é:

$$\overline{x}' = \overline{x} + c$$

Se multiplicarmos cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) por uma constante real c, a média aritmética fica multiplicada por c.

Para demonstrar essa segunda propriedade, consideremos que os novos valores assumidos por essa variável sejam: $cx_1, cx_2, ..., cx_n$. A nova média ($\overline{x}'$) é dada por:

$$\overline{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{n}(cx_i)}{n} = \frac{cx_1 + cx_2 + ... + cx_n}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n} =$$

$$= c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

isto é:

$$\overline{x}' = c \cdot \overline{x}$$

XI. Média aritmética ponderada

Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$ com *freqüências absolutas* respectivamente iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$. A *média aritmética ponderada* de x — indicada por $\overline{x}$ — é definida como a divisão da soma de todos os produtos $x_i \cdot n_i$ ($i = 1, 2, ..., k$) pela soma das freqüências, isto é:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$$

Lembrando que a freqüência relativa (f_i) é definida por $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$, é possível também expressar a média por:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + ... + x_k \cdot f_k$$

Exemplos

1º) Um feirante possuía 50 kg de maçã para vender em uma manhã. Começou a vender as frutas por R$ 2,50 o quilo e, com o passar das horas, reduziu o preço em duas ocasiões para não haver sobras. A tabela seguinte informa a quantidade de maçãs vendidas em cada período, bem como os diferentes preços cobrados pelo feirante.

Período	Preço por quilo (em reais)	Número de quilos de maçã vendidos
Até às 10 h	2,50	32
Das 10 h às 11 h	2,00	13
Das 11 h às 12 h	1,40	5

Naquela manhã, por quanto foi vendido, em média, o quilo da maçã?

Sendo $\overline{p}$ o preço médio do quilo da maçã, temos:

$$\overline{p} = \frac{\overbrace{2,50 + 2,50 + ... + 2,50}^{32 \text{ vezes}} + \overbrace{2,0 + ... + 2,0}^{13 \text{ vezes}} + \overbrace{1,40 + 1,40 + ... + 1,40}^{5 \text{ vezes}}}{32 + 13 + 5}$$

isto é:

$$\overline{p} = \frac{2,50 \cdot 32 + 2,00 \cdot 13 + 1,40 \cdot 5}{50} = \frac{113}{50} \cong 2,26 \text{ reais}$$

Ou seja, 2,26 reais é o preço médio do quilo de maçãs vendido.

Dizemos que se trata de uma média aritmética ponderada dos preços, em que o "fator de ponderação" (que também pode ser chamado de "peso") corresponde à quantidade de maçãs vendidas (freqüência absoluta) em cada período.

2º) A fim de arrecadar recursos para a festa de formatura, cada formando recebeu uma rifa com 20 números para vendê-los a seus conhecidos. Encerrado o prazo combinado, foi feito o levantamento de quantos números cada um vendeu e constatou-se que 10% dos formandos venderam 10 números, 30% venderam 15 números e os demais conseguiram vender todos os números. Qual foi a média de números da rifa que cada formando vendeu?

A variável (x) em questão é a quantidade de números vendidos. Os valores assumidos por x são 10, 15 e 20, com freqüências relativas iguais a 0,10, 0,30 e 0,60, respectivamente.

Segue que a média ($\overline{x}$) é:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = 10 \cdot 0{,}10 + 15 \cdot 0{,}30 + 20 \cdot 0{,}60 = 17{,}5$$

Isso significa que, em média, os formandos venderam 17,5 números da rifa.

EXERCÍCIOS

297. Calcule, em cada caso, a média aritmética dos valores:

a) 18 — 21 — 25 — 19 — 20 — 23 — 21
b) 35 — 36 — 37 — 38 — 39 — 40
c) 7 — 7 — 7 — 8 — 8 — 8 — 9 — 9 — 10 — 10 — 10 — 10
d) 0,5 — 0,5 — 0,5 — 0,5 — 0,25 — 0,25
e) a — a — a — a — a — b — b — b — c — c
f) 43 — 49 — 52 — 41 — 47 — 50 — 53 — 44

298. Um ônibus de excursão partiu com 40 turistas a bordo, dos quais 8 reservaram a viagem com antecedência e pagaram, cada um, R$ 300,00. Os demais pagaram, cada um, R$ 340,00 pela viagem. Qual foi o preço médio que cada turista pagou nessa excursão?

299. Sejam A = {x, 6, 3, 4, 5} e B = {9, 1, 4, 8, x, 6, 11, 3}.

a) Determine x para que as médias aritméticas dos dois conjuntos sejam iguais.
b) Determine os possíveis valores inteiros de x de modo que $\overline{x}_A$ não ultrapasse 4 e $\overline{x}_B$ seja, no mínimo, igual a 5.

300. Para que valores de a as médias aritméticas de $\{-3, a, 10, 9\}$ e $\{-2, 3, a^2, -5\}$ coincidem?

301. x é uma variável que assume os valores:

11 — 8 — 7 — a — 16 — 10

Determine a de modo que:

a) $\overline{x} = 11$
b) $12 \leq \overline{x} < 13$
c) $\overline{x} < 0$

302. Os dados na tabela ao lado referem-se ao número de unidades de um livro didático vendidas, mês a mês, nos dois primeiros anos após seu lançamento.

a) Do 1º para o 2º ano de vendas, a média mensal de livros vendidos aumentou em x unidades. Qual é o valor de x?
b) Do 1º para o 2º ano de vendas, a média mensal de livros vendidos aumentou em y%. Qual é o valor de y?

Mês	1º ano	2º ano
Janeiro	2460	3152
Fevereiro	2388	2963
Março	2126	2049
Abril	1437	1614
Maio	931	1024
Junho	605	898
Julho	619	910
Agosto	421	648
Setembro	742	937
Outubro	687	702
Novembro	1043	1051
Dezembro	1769	2016

303. Os dados seguintes referem-se às quantidades mensais de CDs do cantor X vendidos durante um ano.

3000 — 4000 — 3500 — 5200 — 6700 — 5000
8500 — 7600 — 6500 — 6400 — 7000 — 5400

Em quantos meses as vendas mensais superaram a média de CDs vendidos?

304. A média aritmética de 80 números é igual a 40,5. Adicionando-se a esse conjunto de valores o número 243, qual será a nova média aritmética?

305. A média aritmética de uma lista formada por 55 números é igual a 28. Adicionando-se dois números a essa relação, a média aumenta em 2 unidades. Determine-os, sabendo que um deles é o triplo do outro.

306. A média aritmética de 45 números é igual a 6. Ao acrescentarmos o número x a esses valores, a média aumenta em 50%.

a) Qual é o valor de x?

b) Qual é a média aritmética dos números $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{6}, \frac{x}{8}, \frac{x}{12}$?

307. Uma prova de Conhecimentos Gerais foi aplicada em duas turmas, A e B, com n e m alunos, respectivamente. A média das notas da turma A foi 6,8 e a da turma B foi 5,2. Juntando as notas das duas turmas, a média geral foi 5,8.

a) Intuitivamente, responda: O que é maior: n ou m?

b) Determine n e m, sabendo que a diferença entre eles é igual a 14.

308. A média de "pesos" de 25 clientes hospedadas em um *spa* era de 84 kg. A elas juntou-se um grupo de n amigas. Curiosamente, cada amiga desse grupo "pesava" 90 kg. Determine o valor de n, sabendo que a média de "pesos" de todas as clientes hospedadas no *spa* aumentou em 1 quilograma.

309. A média aritmética de 15 números é 26. Retirando-se um deles, a média dos demais passa a ser 25. Qual foi o número retirado?

310. A média aritmética de n números é 29. Retirando-se o número 24, a média aumenta para 30. Qual é o valor de n?

311. Determine n a fim de que a média aritmética dos números 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2} e 2^{n+3} seja igual a 60.

312. A média aritmética de 7 números inteiros é 4. Determine-os, sabendo que eles formam uma P.A. crescente de razão 6.

313. Calcule a média aritmética entre os números reais log 2, log 3, log 4 e log 5, sabendo que $\log 1{,}2 \cong 0{,}08$.

314. A média aritmética de 10 números, $x_1, x_2, ..., x_{10}$, é 4. Qual será a nova média se:

a) x_1 for aumentado de 4 unidades e x_2 aumentado de 8 unidades?

b) x_1 for subtraído de 10 unidades e x_2 aumentado de 6 unidades?

315. A tabela seguinte mostra o salário médio dos trabalhadores de três cidades, A, B e C, que compõem uma região metropolitana.

Cidade	Salário médio (em reais)
A	530,00
B	600,00
C	700,00

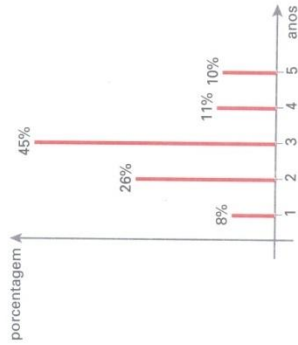
Determine o salário médio na região metropolitana se:

a) A, B e C têm o mesmo número de trabalhadores;

b) A tem 200 000 trabalhadores, B tem 300 000 e C tem 500 000;

c) A tem o dobro de trabalhadores de B, que tem o triplo de trabalhadores de C.

316. Na situação do exercício anterior, suponha que A concentre 70% dos trabalhadores da região metropolitana. Determine o percentual de trabalhadores que vivem em B e C, respectivamente, a fim de que o salário médio dos trabalhadores da região seja R$ 560,00.

317. O gráfico seguinte informa a distribuição do tempo de serviço (em anos) dos funcionários de uma pequena empresa.

Qual é o tempo médio de trabalho dos funcionários dessa empresa?

318. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os n valores assumidos por uma variável quantitativa e $\overline{x}$ a média aritmética correspondente a tais valores. Estabeleça uma relação entre a nova média ($\overline{x}'$) e $\overline{x}$ em cada caso a seguir:

a) Cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) é aumentado de duas unidades.

b) Cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) é multiplicado por três.

c) Cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) é diminuído de cinco unidades.

d) Cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) é multiplicado por -2 e ao resultado são acrescentadas três unidades.

e) Cada x_i ($i = 1, 2, ..., n$) é subtraído de $\overline{x}$ unidades.

319. A tabela seguinte mostra o número de gols por partida registrado nas duas primeiras rodadas de um campeonato brasileiro.

Nº de gols	Freqüência absoluta
0	5 jogos
1	6 jogos
2	8 jogos
3	4 jogos
4	5 jogos
5	3 jogos
6	1 jogo

a) Qual foi a média de gols por partida registrada nas duas primeiras rodadas?

b) A rodada seguinte previa a realização de n jogos no sábado e a dos demais no domingo. Em cada um dos jogos de sábado foram marcados 3 gols. Com isso, a média de gols do campeonato (computadas as duas primeiras rodadas e os jogos de sábado) elevou-se para 2,5 gols por partida. Qual é o valor de n?

320. A média dos salários dos funcionários de uma loja é de R$ 620,00. Qual será a nova média salarial se:

a) cada funcionário receber um aumento de R$ 50,00?

b) cada funcionário receber um aumento de 20%?

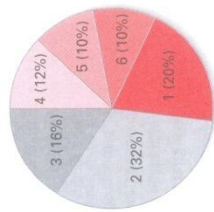
321. Uma prova foi aplicada em duas turmas, A e B, e as médias obtidas foram 7,2 e 6,3, respectivamente. Se cada aluno da turma A tivesse obtido n pontos a menos e cada aluno da turma B tivesse obtido n pontos a mais, as médias das duas turmas seriam iguais. Qual é o valor de n?

322. Em uma empresa, a média salarial é R$ 540,00. Pretende-se dar a cada funcionário um aumento de 5% e um abono de R$ 80,00. Qual será a nova média de salários na empresa se:

a) o aumento for dado antes do abono?

b) o aumento for dado após a incorporação do abono ao salário?

323. É comum encontrarmos produtos com conteúdo líquido menor que o declarado nas embalagens. Em uma pequena cidade, doces de leite são vendidos em copos de vidro em cujos rótulos consta a informação relativa ao "peso" de 200 g. Dois fabricantes, A e B, fornecem doces com conteúdo real médio de 190 g e 195 g, respectivamente. Um supermercado comprou um total de n copos (somadas as duas marcas) de doce de leite, e verificou-se que o conteúdo médio líquido do lote era 193,5 g.
Determine o número de copos comprados de cada fabricante, sabendo que um deles vendeu 40 copos a mais que o outro.

324. (UFF-RJ) Cada um dos 60 alunos da turma A obteve, na avaliação de um trabalho, nota 5 ou nota 10. A média aritmética dessas notas foi 6. Determine quantos alunos obtiveram nota 5 e quantos obtiveram nota 10.

325. (Unicamp-SP) O gráfico ao lado, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32 000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão. Pergunta-se:

a) Quantos candidatos tiveram nota 3?

b) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.

326. Em uma fábrica, a média salarial de determinado setor, que emprega 20 funcionários, é 520 reais. Um deles, que ganhava 550 reais, foi afastado, e foram contratados 2 novos funcionários, um com salário de 480 reais e o outro com salário de 630 reais. Qual é o número inteiro mais próximo da nova média de salários nesse setor?

327. Em uma classe de educação infantil, a média de idade das 25 crianças é 4 anos e 3 meses. Qual é o número de crianças com 4 anos e 9 meses que devem ingressar nessa classe a fim de elevar essa média para 4 anos e 4 meses?

328. Um programa beneficente veiculado em um canal de TV tinha como objetivo arrecadar fundos para crianças carentes. O telespectador poderia escolher entre 10, 20 ou 50 reais e ligar para o número correspondente ao valor escolhido a fim de fazer a doação. Na primeira hora, 50 000 pessoas fizeram doações, das quais 48% contribuíram com o valor mínimo, 37% com o valor intermediário e cada uma das demais com o valor maior.

a) Qual foi a média de doações da primeira hora?

b) Na hora seguinte, 30 000 pessoas contribuíram para a campanha, das quais $\frac{1}{3}$ colaborou com o valor mínimo. Determine o valor doado pelas demais pessoas, sabendo que a doação média das duas primeiras horas foi R$ 22,80.

329. Um grupo de 20 nadadores, cuja média de altura é 1,88 m, está treinando para uma competição. Se um grupo de 7 atletas cuja média de altura é 1,92 m se juntar ao primeiro grupo, qual será a média de altura dos 27 atletas?

330. A média aritmética dos números $a_1, a_2, a_3, ..., a_{14}, a_{15}$ é 24. Qual é a média aritmética dos números $a_1 + 1, a_2 + 2, ..., a_{14} + 14, a_{15} + 15$?

331. (Fuvest-SP) Numa classe com vinte alunos as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto a média dos aprovados foi 77.
Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

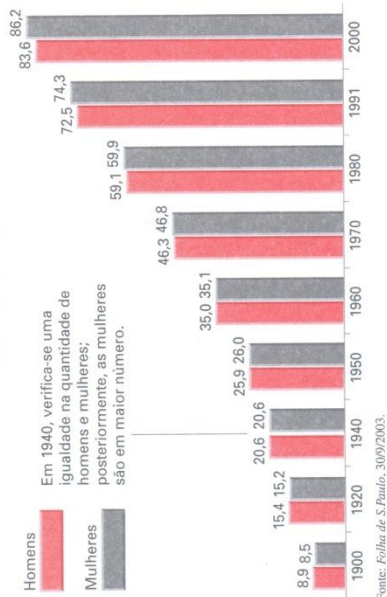
a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos 5 pontos extras.
b) Com a atribuição dos 5 pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação?

332. A média aritmética dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é p. Determine a média aritmética dos números $x_1 - 1, x_2 + 1, x_3 - 1, x_4 + 1, ..., x_n + (-1)^n$, considerando que:

a) n é par;
b) n é ímpar.

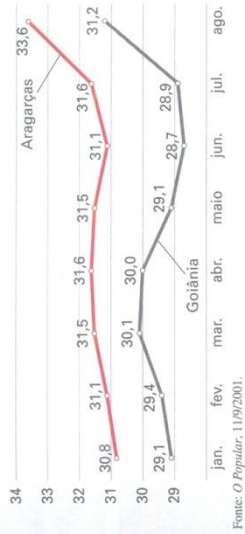
333. (UF-GO) Em um time de futebol, o jogador mais velho entre os onze titulares foi substituído por um jogador de 16 anos. Isso fez com que a média de idade dos 11 jogadores diminuísse 2 anos.
Calcule a idade do jogador mais velho que foi substituído.

334.

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 30/9/2003.

Calcule o percentual da população feminina e da população masculina relativo a cada ano constante no gráfico. A seguir, utilizando apenas uma casa após a vírgula, determine, relativamente a cada sexo:

a) a média desses percentuais no período considerado;
b) a média desses percentuais de 1940 a 2000.

335. (UF-GO) O gráfico abaixo representa as temperaturas médias mensais nas cidades de Goiânia e Aragarças (considerada a cidade mais quente do Estado de Goiás), no período de janeiro a agosto de 2001.

Fonte: *O Popular*, 11/9/2001.

Com base nesse gráfico, julgue como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das afirmações a seguir:

a) Em Goiânia, a temperatura média no mês de agosto é 4% superior à temperatura média no mês de abril.
b) Em Goiânia, a média das temperaturas médias mensais no período de janeiro a agosto é igual à temperatura média do mês de junho.
c) No período de janeiro a agosto, a amplitude (diferença entre o maior e o menor valor) da temperatura média mensal, em Goiânia, é maior do que em Aragarças.
d) No período de janeiro a agosto, a diferença das temperaturas médias mensais entre Aragarças e Goiânia é máxima no mês de maio.

336. (UF-MS) Suprimindo-se um dos elementos do conjunto {1, 2, 3, ..., 201}, a média aritmética dos elementos restantes é 101,45. Sendo m o elemento suprimido, calcule o valor de $m + 201$.

337. Considere um conjunto de dados formado por n valores. Adicionando-se a esse conjunto o número 119, a média aumenta 4 unidades em relação à média inicial; retirando-se do conjunto original o número 54, a média diminui 1 unidade em relação à média inicial.

a) Qual é o valor de n?
b) Qual é a média aritmética inicial do conjunto de dados?

XII. Mediana

Em 2002, a população brasileira era constituída por aproximadamente 175 milhões de habitantes.

A área da superfície do território brasileiro é 8 514 204,8 km².

Assim, a densidade demográfica nesse ano era:

$$\frac{175 \text{ milhões de habitantes}}{8{,}514 \text{ milhões de km}^2} \cong 20{,}6 \text{ habitantes/km}^2$$

Na tabela seguinte, constam os valores (expressos em habitantes por km²) das densidades demográficas dos 26 Estados, além do Distrito Federal.

Estado	Densidade Demográfica	Estado	Densidade Demográfica
Acre	3,7	Paraíba	61,1
Alagoas	101,3	Paraná	48,0
Amapá	3,3	Pernambuco	80,3
Amazonas	1,8	Piauí	11,3
Bahia	23,2	Rio de Janeiro	328,0
Ceará	50,9	Rio Grande do Norte	52,2
Distrito Federal	352,2	Rio Grande do Sul	36,1
Espírito Santo	67,2	Rondônia	5,8
Goiás	14,7	Roraima	1,5
Maranhão	17,0	Santa Catarina	56,1
Mato Grosso	2,8	São Paulo	149,0
Mato Grosso do Sul	5,8	Sergipe	81,1
Minas Gerais	30,5	Tocantins	4,2
Pará	5,0		

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

Calculando a média das densidades relacionadas acima, encontramos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{27} x_i}{27} = \frac{1\,594{,}1}{27} \cong 59{,}04 \text{ habitantes/km}^2$$

Observe que esse valor é quase o triplo do valor encontrado para a densidade demográfica da população brasileira.

O cálculo da média aritmética ficou muito afetado por lugares com altíssima concentração populacional, como o Distrito Federal e o Estado do Rio de Janeiro, cujos valores — 352,2 e 328,0, respectivamente — destoam fortemente dos valores dos demais Estados.

Calculemos a nova média, eliminando esses dois valores:

$$\bar{x}' = \frac{1\,594{,}1 - 352{,}2 - 328{,}0}{25} = \frac{913{,}9}{25} \cong 36{,}5 \text{ habitantes/km}^2$$

Observe que esse valor já está mais próximo ao correspondente à densidade demográfica brasileira.

Se eliminarmos o Estado de São Paulo, que também tem uma alta densidade demográfica (149 habitantes/km²), a nova média será:

$$\bar{x}'' = \frac{913{,}9 - 149}{24} = \frac{764{,}9}{24} \cong 31{,}8 \text{ habitantes/km}^2$$

Conforme podemos notar, esse novo valor está ainda mais próximo da real densidade demográfica brasileira.

Como vimos, a média aritmética pode ser muito afetada quando encontramos valores discrepantes em um conjunto de dados, podendo se tornar uma medida de centralidade pouco representativa do resumo dos dados.

Para contornar questões dessa natureza, definiremos, a seguir, uma medida de centralidade mais resistente aos valores discrepantes (em inglês, chamados *outliers*) denominada *mediana*.

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ os n valores ordenados de uma variável x.

A *mediana* desse conjunto de valores — indicada por Me — é definida por:

$$\text{Me} = \begin{cases} x_{\left(\frac{(n+1)}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Essa definição garante que a mediana seja um valor que divide o conjunto de dados em duas partes nas quais o número de elementos é o mesmo e de modo que o número de valores menores ou iguais à mediana seja igual ao número de valores maiores ou iguais a ela.

Exemplos

1º) Vejamos como encontrar a mediana dos dados referentes à introdução sobre densidade demográfica.

É preciso inicialmente ordenar os valores (usaremos as siglas dos Estados e a ordem crescente):

RR — AM — MT — AP — AC — TO — PA — RO — MS —

PI — GO — MA — BA — MG — RS — PR — CE — RN —

SC — PB — ES — PE — SE — AL — SP — RJ — DF

Como n é ímpar (n = 27), segue que:

$$Me = x_{\left(\frac{27+1}{2}\right)} = x_{14}$$

ou seja, a mediana é a densidade demográfica do 14º Estado na seqüência acima, que é Minas Gerais; portanto, Me = 30,5 habitantes/km². Note que essa medida de centralidade é mais representativa que a média (59,04). O cálculo da média só fica próximo ao da mediana quando eliminamos os Estados com alta densidade (DF, RJ e SP).

2º) Os números seguintes indicam a quantidade de faltas de um aluno durante o ano letivo nas dez disciplinas do seu curso:

3 — 4 — 9 — 6 — 3 — 8 — 2 — 4 — 5 — 6

Para encontrar o número mediano de faltas do aluno, ordenamos esses valores:

2 — 3 — 3 — 4 — 4 — 5 — 6 — 6 — 8 — 9

Como n é par (n = 10), temos:

$$Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5 \text{ faltas}$$

XIII. Moda

Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$, com freqüências absolutas iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. Se o máximo entre $n_1, n_2, ..., n_k$ é igual a n_j, $j \in \{1, 2, ..., k\}$, dizemos que a moda — indicada por Mo — é igual ao valor x_j.

Ou seja:

> A moda de um conjunto de valores corresponde ao valor que ocorre mais vezes.

Exemplos

Vamos determinar a moda dos seguintes conjuntos de valores.

1º) 6 — 9 — 12 — 9 — 4 — 5 — 9

A moda é Mo = 9, pois há três valores iguais a 9.

2º) 12 — 13 — 19 — 13 — 14 — 12 — 16

Há duas modas, 12 e 13, pois cada um desses valores ocorre com maior freqüência (duas vezes). Dizemos que se trata de uma distribuição *bimodal*.

3º) 4 — 29 — 15 — 13 — 18 — 20 — 21 — 26 — 9

Nesse caso, todos os valores "aparecem" com a mesma freqüência unitária.

Assim, não há moda nessa distribuição.

EXERCÍCIOS

338. Calcule a moda e a mediana de cada um dos seguintes conjuntos de valores:

a) 9 — 8 — 8 — 7 — 10 — 12 — 11 — 8 — 8 — 7 — 6 — 14 — 10
b) 0 — 0 — 0 — 1 — 1 — 1 — 1 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3
c) 40 — 44 — 42 — 23 — 36 — 40
d) 0,6 — 0,7 — 0,7 — 0,5 — 0,8 — 0,6 — 0,4 — 0,9

339. Determine as medidas de centralidade (média, mediana e moda) correspondentes aos percentuais relacionados na tabela a seguir:

	Os 20 municípios com menor taxa de analfabetismo no Brasil (%)	
	Município	Taxa de analfabetismo
1º	São João do Oeste (SC)	0,9
2º	Morro Reuter (RS)	1,6
3º	Harmonia (RS)	1,8
4º	Pomerode (SC)	1,9
5º	Bom Princípio (RS)	1,9
6º	São Vendelino (RS)	1,9
7º	Feliz (RS)	1,9
8º	Lagoa dos Três Cantos (RS)	2,0
9º	Salvador das Missões (RS)	2,2
10º	Ivoti (RS)	2,3
11º	Quatro Pontes (PR)	2,4
12º	Vale Real (RS)	2,5
13º	Timbó (SC)	2,6
14º	Dois Irmãos (RS)	2,6
15º	Jaraguá do Sul (SC)	2,6
16º	São José do Hortêncio (RS)	2,7
17º	Teutônia (RS)	2,7
18º	Blumenau (SC)	2,8
19º	Linha Nova (RS)	2,8
20º	Nova Petrópolis (RS)	2,8

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 5/6/2003.

340. As tabelas seguintes relacionam os países com maior consumo anual de peixe.

	Os maiores consumidores	
	País	Quantidade de peixe consumido (milhões de toneladas)
1º	China	30
2º	Japão	8
3º	Estados Unidos	6
4º	Índia	4
5º	Indonésia	4

	Os maiores consumidores	
	País	Quantidade de peixe consumido (milhões de toneladas)
6º	Rússia	3
7º	Coréia do Sul	2
8º	Filipinas	2
9º	França	2
10º	Espanha	2

Fonte: *Veja*, 9/7/2003.

a) Calcule a média, a mediana e a moda dos dados apresentados. Por que a média é bem maior que as outras duas medidas?

b) Sabendo que a população da China é 1,285 bilhão de habitantes e a da Espanha é 39,9 milhões de habitantes, mostre que o consumo *per capita* anual na Espanha é maior que o dobro do consumo *per capita* na China. (Dados extraídos de: *Almanaque Abril*, 2002.)

341. As tabelas seguintes informam o número de jornais diários em circulação na região metropolitana das capitais brasileiras.

Cidade	Jornais em circulação
Aracaju	3
Belém	3
Belo Horizonte	6
Boa Vista	3
Brasília	2
Campo Grande	2
Cuiabá	3
Curitiba	8
Florianópolis	3

Cidade	Jornais em circulação
Fortaleza	4
Goiânia	2
João Pessoa	3
Macapá	2
Maceió	3
Manaus	4
Natal	3
Palmas	3
Porto Alegre	3

Cidade	Jornais em circulação
Porto Velho	3
Recife	4
Rio Branco	4
Rio de Janeiro	11
Salvador	4
São Luís	2
São Paulo	16
Teresina	5
Vitória	2

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

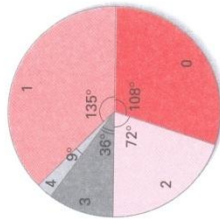
a) Intuitivamente, responda: Qual medida de centralidade — a média ou a mediana — é mais adequada para representar esses valores?
b) Calcule a média, a moda e a mediana.
c) Elimine os dois Estados com maior número de jornais e recalcule a média.

342. Um instituto de pesquisa fez um levantamento dos preços por quilo de vários produtos em um sacolão. Os resultados estão na tabela abaixo.

Preço (em reais)	Freqüência (%)
2,00	30
3,00	40
4,00	20
6,00	10

Qual é a média, a moda e a mediana do preço por quilo dos produtos à venda nesse sacolão?

343. O gráfico ao lado informa a distribuição do número de filhos de 800 funcionários de uma empresa.

a) Quantos funcionários têm exatamente 2 filhos?
b) Qual é a mediana do número de filhos?
c) Qual é a moda do número de filhos?

344. A tabela seguinte informa o número de defeitos, por peça, encontrados durante uma inspeção feita em um lote de 80 peças que chegou a um porto.

Número de defeitos por peça	0	1	2	3	4
Número de peças	12	20	24	16	8

a) Considerando o número de defeitos por peça, qual é a mediana dos valores encontrados?
b) Qual será a nova mediana se forem acrescentadas a esse lote 18 peças, cada uma com exatamente 1 defeito?
c) Adicionando-se ao lote inicial n peças, cada uma com 3 defeitos, o valor da mediana passa a ser 3. Qual é o menor valor possível de n?

345. Os valores ordenados abaixo referem-se ao número de desistências mensais de reservas solicitadas a uma companhia aérea.

48 — 52 — 58 — 63 — 68 — x — 76 — 82 — y — 96 — 98 — 102

a) Sabendo que a mediana desses valores é 73 e que a média é 75, quais são os valores de x e de y?
b) Supondo que em cada um dos 5 meses seguintes o número de desistências variou entre 50 e 60, qual será o valor da mediana relativa a esses 17 meses?

346. Considere a seqüência decrescente:

$2^n, 2^{n-1}, ..., 2^{n-5}$ (em que n é um número natural)

Sabendo que a mediana dos elementos dessa seqüência é 6, determine:
a) o valor de n;
b) a média aritmética dos elementos dessa seqüência.

347. (UnB-DF) A tabela adiante apresenta o levantamento das quantidades de peças defeituosas para cada lote de 100 unidades fabricadas em uma linha de produção de autopeças durante um período de 30 dias úteis.

Dia	Nº de peças defeituosas	Dia	Nº de peças defeituosas	Dia	Nº de peças defeituosas
1	6	11	1	21	2
2	4	12	5	22	6
3	3	13	4	23	3
4	4	14	1	24	5
5	2	15	3	25	2
6	4	16	7	26	1
7	3	17	5	27	3
8	5	18	6	28	2
9	1	19	4	29	5
10	2	20	3	30	7

Considerando S a série numérica de distribuição de freqüências de peças defeituosas por lote de 100 unidades, julgue os itens abaixo:
1) A moda da série S é 5.
2) Durante o período de levantamento desses dados, o percentual de peças defeituosas ficou, em média, abaixo de 3,7%.
3) Os dados obtidos nos 10 primeiros dias do levantamento geram uma série numérica de distribuição de freqüências com a mesma mediana da série S.

348. Uma pesquisa realizada com 280 pessoas fez o levantamento da freqüência anual de visitas ao dentista. Os resultados aparecem na tabela ao lado.
Responda:

a) Qual é o número mediano de visitas?

b) Quantas pessoas dessa amostra que visitam o dentista uma única vez por ano deveriam passar a visitá-lo duas vezes por ano a fim de que a mediana passasse a ser 1,5 visita?

Número de visitas ao dentista por ano	Número de pessoas
0	63
1	105
2	39
3	47
4	16
5 ou mais	10
Total	**280**

XIV. Variância

Em certo país, o governo financia um programa de assistência às famílias de baixa renda. Cada família recebe, de cinco em cinco semanas, a quantia de 100 UM (unidades monetárias) para comprar produtos de alimentação em estabelecimentos conveniados. O coordenador desse projeto selecionou em uma pequena cidade quatro famílias e acompanhou a distribuição dos gastos semana a semana.

Observe a tabela:

	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	5ª semana	Total (valor do benefício)
Família I	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	100 UM
Família II	20 UM	24 UM	20 UM	16 UM	20 UM	100 UM
Família III	12 UM	28 UM	24 UM	20 UM	16 UM	100 UM
Família IV	36 UM	32 UM	20 UM	8 UM	4 UM	100 UM

Como cada família gasta 100 UM no período de cinco semanas, a média semanal de gastos é $\frac{100}{5} = 20$ UM.

A leitura dos valores da tabela mostra um comportamento diferente de cada família na utilização do benefício concedido pelo governo: a família I, por exemplo, gasta sempre a mesma quantia por semana para comprar alimentos; já a família IV faz gastos que oscilam entre 4 e 36 UM por semana.

Desse modo, se essa análise for limitada à média semanal de gastos, estarão sendo omitidas informações importantes em relação à homogeneidade ou heterogeneidade dos gastos semanais de cada família. Para revelar o grau de variabilidade de um conjunto de dados há necessidade de uma medida específica, a variância, definida a seguir.

Seja *x* uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$ e $\bar{x}$ a média aritmética correspondente a esses valores.

A *variância* desses valores — indicada por Var(x) ou σ^2 — é definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Notemos que cada termo do numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio. Essa diferença traduz o quanto um valor observado se distancia do valor médio, sendo, portanto, uma medida do grau de variabilidade dos dados em estudo.

Vamos calcular a variância dos gastos semanais das quatro famílias (lembre que a média semanal, para cada família, é 20 UM).

- Família I:

$$\sigma^2 = \frac{(20-20)^2 + (20-20)^2 + (20-20)^2 + (20-20)^2 + (20-20)^2}{5} = 0$$

- Família II:

$$\sigma^2 = \frac{(20-20)^2 + (24-20)^2 + (20-20)^2 + (16-20)^2 + (20-20)^2}{5} =$$

$$= \frac{16+16}{5} = 6{,}4 \text{ UM}^2$$

- Família III:

$$\sigma^2 = \frac{(12-20)^2 + (28-20)^2 + (24-20)^2 + (20-20)^2 + (16-20)^2}{5} =$$

$$= \frac{64+64+16+16}{5} = 32 \text{ UM}^2$$

• Família IV:

$$\sigma^2 = \frac{(36-20)^2 + (32-20)^2 + (20-20)^2 + (8-20)^2 + (4-20)^2}{5} =$$

$$= \frac{256+144+144+256}{5} = 160 \text{ UM}^2$$

O aumento no valor da variância nesses cálculos revela uma variabilidade crescente de gastos semanais em relação à média (20 UM).

Nessa situação, a *unidade de variância* é UM^2 e o *gasto semanal médio* é expresso em UM, o que gera uma incompatibilidade. Para uniformizar as unidades, definiremos mais adiante o desvio padrão σ.

12. *Propriedades*

Como a média aritmética, a variância também apresenta duas propriedades importantes.

Seja *x* uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$. Considere $\bar{x}$ a média aritmética e σ^2 a variância correspondente.

> Se a cada x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ for adicionada uma constante real *c*, a variância não se altera.

Essa propriedade pode ser demonstrada da seguinte maneira.

Sendo $(\sigma^2)'$ a nova variância, mostremos que $(\sigma^2)' = \sigma^2$.

Consideremos $x'_i = x_i + c$ $(i = 1, 2, ..., n)$ os novos valores assumidos pela variável.

Conforme vimos no item *Média aritmética*, a nova média $\bar{x}'$ é dada por $\bar{x}' = \bar{x} + c$.

Da definição de variância, segue:

$$(\sigma^2)' = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - \bar{x}')^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} [(x_i + c) - (\bar{x} + c)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i + c - \bar{x} - c)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2$$

> Se cada x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ for multiplicado por uma constante real *c*, a variância fica multiplicada por c^2.

Vamos demonstrar essa segunda propriedade.

Sendo $(\sigma^2)'$ a nova variância, os novos valores que a variável *x* assume são:

$x'_i = c \cdot x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, a saber: $c \cdot x_1, c \cdot x_2, ..., c \cdot x_n$

De acordo com o item *Média aritmética*, a nova média $\bar{x}'$ é dada por $\bar{x}' = c \cdot \bar{x}$.

Temos:

$$(\sigma^2)' = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - \bar{x}')^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (c \cdot x_i - c \cdot \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= c^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = c^2 \cdot \sigma^2$$

XV. Desvio padrão

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os valores assumidos por uma variável *x*. Chamamos *desvio padrão* de *x* — indicado por DP(x) ou σ — a raiz quadrada da variância de *x*.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Exemplo

Na situação considerada na introdução do estudo da variância (ver p. 134), o desvio padrão dos gastos de cada família é dado por:

- família I: $\sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0$ UM
- família II: $\sigma^2 = 6{,}4 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{6{,}4 \text{ UM}^2} \cong 2{,}53$ UM
- família III: $\sigma^2 = 32 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{32 \text{ UM}^2} \cong 5{,}66$ UM
- família IV: $\sigma^2 = 160 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{160 \text{ UM}^2} \cong 12{,}65$ UM

Observação

Das duas propriedades descritas para a variância (ver p. 136), decorrem as seguintes conseqüências imediatas:

1ª) Quando adicionamos uma constante a cada elemento de um conjunto de valores, o desvio padrão não se altera.

2ª) Quando multiplicamos cada elemento de um conjunto de valores por uma constante real *c*, o desvio padrão fica multiplicado por *c*.

13. *Outra expressão para variância e para desvio padrão*

É possível encontrar para variância e desvio padrão outras expressões equivalentes às das definições apresentadas e que poderão ser úteis na resolução de alguns exercícios.

Vejamos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Desenvolvendo o produto notável, temos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \overline{x} + \overline{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \overline{x}^2}{n}$$

Como $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, podemos escrever:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

isto é:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$$

, que é expressão para a variância

Como o desvio padrão corresponde à raiz quadrada da variância, temos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]}$$

, que é expressão para o desvio padrão

Exemplo

Os dados seguintes referem-se aos gastos mensais com ônibus e metrô (expressos em reais) que um estudante universitário tem durante um semestre:

42 — 50 — 54 — 48 — 56 — 59

Aplicando a expressão acima para o cálculo do desvio padrão (σ) das despesas, temos:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 42 + 50 + 54 + 48 + 56 + 59 = 309$$

e

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 42^2 + 50^2 + 54^2 + 48^2 + 56^2 + 59^2 = 16\,101$$

Daí:

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} \cdot \left[16\,101 - \frac{309^2}{6}\right] = 31{,}25 \text{ (reais)}^2 \Rightarrow \sigma \cong 5{,}59 \text{ reais}$$

14. *Observação geral sobre variância e desvio padrão*

As expressões das medidas de dispersão apresentadas no item *Variância* referem-se à *variância* (e *desvio padrão*) *populacional*.

Nos casos em que os dados são coletados a partir de uma amostra da população, obtém-se como medida de dispersão a chamada *variância amostral*, representada por S^2 e dada por:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$$

, sendo $\overline{x}$ a média amostral

Observe que as expressões que definem σ^2 e S^2 diferem apenas pelo denominador: σ^2 apresenta como denominador n e S^2 apresenta como denominador $n - 1$. O motivo dessa diferença exige conhecimentos mais aprofundados que os fornecidos nesta obra introdutória.

Fica, então, convencionado que, nos exercícios seguintes, salvo observações contrárias, deve-se considerar sempre a *variância populacional* σ^2.

EXERCÍCIOS

349. Calcule o desvio padrão dos seguintes conjuntos de valores:

a) 2 — 3 — 4 — 5 — 6

b) 2 — 2 — 3 — 4 — 4

c) (−2) — (−1) — (−1) — 0 — 1 — 3

d) $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{10}$

e) 70 — 65 — 60 — 60 — 65 — 68 — 72 — 60

350. A tabela seguinte informa a participação percentual dos Estados da região Nordeste no produto interno bruto (PIB) nacional.

Alagoas	0,9%
Bahia	4,4%
Ceará	1,8%
Maranhão	1,0%
Paraíba	0,7%

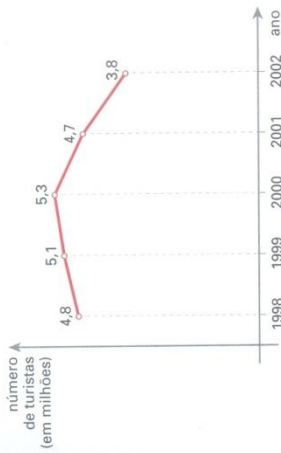
Pernambuco	2,3%
Piauí	0,5%
Rio Grande do Norte	0,9%
Sergipe	0,5%

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

a) Calcule a média ($\bar{x}$) e o desvio padrão (σ) dos percentuais acima.

b) Quantos Estados têm participação pertencente ao intervalo

$$\left[\bar{x} - \frac{1}{2}\sigma, \bar{x} + \frac{1}{2}\sigma\right]?$$

351. O gráfico seguinte mostra os números relativos aos turistas estrangeiros que estiveram no Brasil no período de 1998 a 2002.

Fonte: *Veja*, 16/4/2003.

Qual é o desvio padrão dos dados apresentados?

352. Os dados seguintes referem-se às porcentagens da população de países sul-americanos que vivem em áreas urbanas.

Argentina	90%
Bolívia	63%
Brasil	81%
Chile	86%
Colômbia	74%

Equador	65%
Paraguai	56%
Peru	73%
Uruguai	91%
Venezuela	87%

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

a) Calcule a média e o desvio padrão dos percentuais acima.

b) Elimine os dois países com menores percentuais. O que ocorrerá com o desvio padrão? Faça os cálculos para confirmar sua resposta.

353. Um conjunto é formado por três elementos: 8, 10 e x. Determine os possíveis valores de x para os quais a variância desses elementos é igual a $\frac{26}{3}$.

354. Sejam $x_1, x_2, ..., x_k$ os k valores distintos assumidos por uma variável x, com freqüências absolutas iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. Encontre uma expressão para a variância desses valores.

Solução

Os valores estão assim distribuídos:

$$\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n_2 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{n_k \text{ vezes}}$$

A média aritmética é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Usando a definição de variância:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} \Big\{\overbrace{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_1 - \overline{x})^2}^{n_1 \text{ vezes}} + \overbrace{(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_2 + \overline{x})^2}^{n_2 \text{ vezes}} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{(x_k - \overline{x})^2 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2}_{n_k \text{ vezes}}\Big\}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} \cdot \{n_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + n_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k \cdot (x_k - \overline{x})^2\}$$

que é expressão da variância em função da freqüência absoluta.

Temos também:

$$\sigma^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + f_k(x_k - \overline{x})^2$$

em que $f_1, f_2, \ldots, f_k$ são as freqüências relativas correspondentes.

355. A tabela seguinte informa a distribuição do número de cartões amarelos recebida por um time durante os 35 jogos de um torneio:

Número de cartões	Número de jogos
0	5
1	19
2	10
3	7
4	4

Calcule o desvio padrão referente ao número de cartões recebidos.

Solução

Temos:

- $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4}{5 + 19 + 10 + 7 + 4} = \dfrac{76}{45} \cong 1{,}69$

- $\sigma^2 = \dfrac{1}{45} \cdot [(0 - 1{,}69)^2 \cdot 5 + (1 - 1{,}69)^2 \cdot 19 + (2 - 1{,}69)^2 \cdot 10 +$ $+ (3 - 1{,}69)^2 \cdot 7 + (4 - 1{,}69)^2 \cdot 4]$

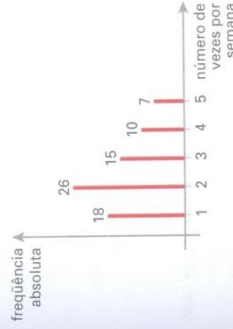
$$\sigma^2 = \frac{1}{45} \cdot [14{,}28 + 9{,}05 + 0{,}96 + 12{,}01 + 21{,}34] \Rightarrow \sigma^2 = \frac{57{,}64}{45} =$$

$$= 1{,}28 \Rightarrow \sigma \cong 1{,}13 \text{ cartão}$$

356. Um professor aplicou um exercício em sua turma de 60 alunos e as notas possíveis eram zero, 0,5 ponto ou 1 ponto. Sabendo que 40% dos alunos não obtiveram pontuação, 35% conseguiram 0,5 ponto e o restante atingiu a pontuação máxima, determine:

a) a mediana dos pontos obtidos pelos alunos nessa atividade;

b) a variância correspondente aos pontos obtidos pelos alunos.

357. A Secretaria de Saúde de uma cidade está interessada em saber com que freqüência semanal seus habitantes praticam atividades físicas. Para isso, uma equipe entrevistou n pessoas e os resultados encontram-se no gráfico seguinte:

a) Determine o valor de n.

b) Qual é a média das freqüências de atividades físicas?

c) Qual é a moda e a mediana dos dados obtidos?

d) Qual é o desvio padrão dos dados obtidos?

358. Um conjunto de dados possui n valores ($n > 3$), dos quais três são iguais a 2 e os demais iguais a 5.

a) Determine, em função de n, a média aritmética desses elementos.

b) Determine o maior *valor inteiro* de n para o qual a variância desse conjunto de valores seja maior que 2.

359. (Unicamp-SP) Para um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, a média aritmética de X é definida por $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ e a variância de X é definida por $v = \dfrac{1}{4}\,[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_4 - \bar{x})^2]$.

Dado o conjunto $X = \{2, 5, 8, 9\}$, pede-se:

a) Calcular a média aritmética de X.

b) Calcular a variância de X.

c) Quais elementos de X pertencem ao intervalo $[\bar{x} - \sqrt{v},\ \bar{x} + \sqrt{v}]$?

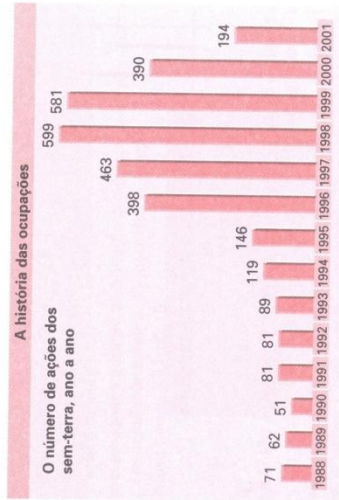
360. (FGV-SP) Dados n valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, seja M sua média aritmética. Chama-se variância desses valores ao número σ^2 dado por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2}{n}$$

A raiz quadrada não negativa da variância chama-se desvio padrão.

a) Se em cada um de 10 meses consecutivos um fundo de investimentos render 1% ao mês, qual o desvio padrão dessas taxas de rendimento?

b) Se em cada um de 6 meses consecutivos o fundo render 1% ao mês e render 3% ao mês em cada um dos quatro meses seguintes, qual o desvio padrão dessas taxas de rendimento?

361. Observe os dados apresentados pelo gráfico:

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 6/3/2003.

a) Encontre o desvio padrão correspondente ao número anual de ações registradas no período de 1988 a 2001.

b) Considere os períodos de 1988 a 1993 e de 1996 a 2000. Calcule o desvio padrão correspondente a cada período. Por que se observa uma queda em relação ao desvio encontrado no item *a*?

362. O Departamento de Aviação Civil registrou durante cinco dias o percentual diário de vôos de duas companhias aéreas, *A* e *B*, que decolaram sem atraso. Os dados estão relacionados a seguir:

Companhia *A*:

90% — 92% — 95% — 88% — 91%

Companhia *B*:

97% — 88% — 98% — 86% — 90%

a) Qual companhia apresentou percentual médio mais alto?

b) Qual companhia apresentou desempenho mais regular?

363. Seja o conjunto de valores 4, 1, 8, 7 e n. Qual é o valor de n que minimiza a variância desses valores? Qual é, nesse caso, o valor da variância?

364. Considere os seguintes conjuntos de valores:

$$A = \{3, 3, 3, 3, 4, 4\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 2, 3, 3, 4, 4\}$$

Compare σ_A^2 com σ_B^2.

365. A tabela de freqüências ao lado informa o número de filhos dos 80 funcionários de uma escola.

Número de filhos	Freqüência absoluta
0	20
1	36
2	14
3	8
4	2

a) Qual é o desvio padrão correspondente ao número de filhos?

b) Suponha que cada funcionário dessa escola tenha um novo filho. Qual será o novo desvio padrão?

366. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os valores assumidos por uma variável x, e σ^2 a variância correspondente a tais valores. Determine a relação existente entre a nova variância $(\sigma^2)'$ e a variância original (σ^2) quando:

a) cada x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ é multiplicado por 2;

b) a cada x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ são adicionadas 3 unidades;

c) cada x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ é dividido por 5;

d) cada x_i é multiplicado por 4 e ao valor obtido são adicionadas 4 unidades;

e) de cada x_i subtraem-se 10 unidades.

367. Os saldos (x_i) em cadernetas de poupança de 1 000 clientes de um banco em uma pequena cidade são tais que:

$$\sum_i x_i = 322\,000 \quad \text{e} \quad \sum_i x_i^2 = 119\,309\,000, \text{ para } i \in \{1, 2, ..., 1\,000\}$$

a) Determine o saldo médio das cadernetas.

b) Qual é o desvio padrão correspondente aos saldos das cadernetas?

368. Uma pastelaria situada no centro de uma grande cidade funciona os sete dias da semana. Em certa semana, a receita média diária era R$ 1 200,00 e a soma dos quadrados das receitas diárias totalizava R$ 10 086 300,00. Qual foi o desvio padrão da receita diária registrada nessa semana?

369. Que número deve ser acrescentado ao conjunto de valores 2, 6, 5 e 7 a fim de que a variância aumente de 3,3 unidades?

370. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ valores assumidos por uma variável, $\overline{x}$ a média aritmética e σ o desvio padrão. Suponha que de cada x_i (i = 1, 2, ..., n) subtraímos a média e dividimos a diferença obtida pelo desvio padrão. Qual será a nova média e o novo desvio padrão desse conjunto?

371. (UF-GO) Dados os números $a_1, a_2, ..., a_n$ e considerando a média aritmética M(x) dos *n* números $(a_1 - x)^2, (a_2 - x)^2, ..., (a_n - x)^2$, em que *x* é um número real qualquer:

a) determine *x* de modo que a média M(x) seja mínima;

b) determine o valor mínimo da média M(x), que é chamado de variância de $a_1, a_2, ..., a_n$.

372. Os dados seguintes referem-se à mortalidade infantil dos Estados da região Nordeste e indicam o número de crianças que morrem no primeiro ano de vida entre 1 000 crianças nascidas vivas.

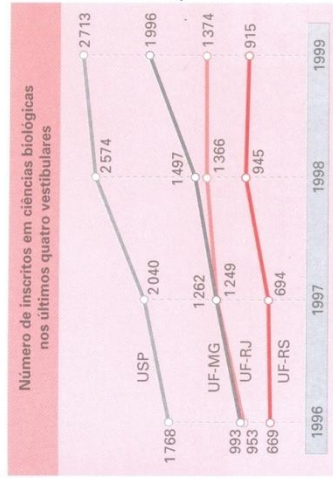
Alagoas	64,4
Bahia	44,7
Ceará	51,6
Maranhão	52,8
Paraíba	59,4

Pernambuco	57,5
Piauí	44,4
Rio Grande do Norte	47,9
Sergipe	44,5

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

a) Encontre a variância dos dados apresentados.

b) Admitindo-se que um programa do governo consiga reduzir em 15% as taxas de mortalidade apresentadas, qual será o novo valor da variância?

373. (UnB-DF) Um novo *boom* desponta nas estatísticas dos últimos vestibulares. Desde o surgimento de Dolly, a polêmica ovelha clonada a partir da célula de um animal adulto, a carreira de ciências biológicas recebe cada vez mais candidatos e essa área firma-se como a ciência do próximo milênio.
O gráfico a seguir ilustra o número de inscritos nos últimos quatro vestibulares que disputaram as vagas oferecidas pela Universidade de São Paulo (USP) e pelas universidades federais do Rio de Janeiro (UF-RJ), de Minas Gerais (UF-MG) e do Rio Grande do Sul (UF-RS).

Adaptado de: *Época*, 26/4/1999.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes em *V* ou *F*, justificando:

1) De 1997 a 1998, o crescimento percentual do número de inscritos na USP foi maior que o da UF-RS.
2) Todos os segmentos de reta apresentados no gráfico têm inclinação positiva.
3) Durante todo o período analisado, a UF-MG foi a universidade que apresentou o maior crescimento percentual, mas não o maior crescimento absoluto.
4) Os crescimentos percentuais anuais na UF-RJ diminuíram a cada ano.
5) Considerando, para cada universidade representada no gráfico, a série numérica formada pelos números de inscritos em ciências biológicas nos últimos quatro vestibulares, a série da USP é a que apresenta a maior mediana, tendo desvio padrão maior que o da UF-RJ.

374. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os n valores assumidos por uma variável quantitativa. Uma medida de dispersão usual é o desvio médio, que é indicado por DM(x) e definido pela relação:

$$DM(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + ... + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Dado o conjunto de valores 2, 3, 5, 4 e 6, obtenha o desvio médio correspondente.

Solução

Temos:

- $\overline{x} = \frac{2+3+5+4+6}{5} = 4$
- $DM(x) = \frac{|2-4|+|3-4|+|5-4|+|4-4|+|6-4|}{5} =$

$= \frac{2+1+1+0+2}{5} = 1,2$

375. Calcule o desvio médio dos seguintes conjuntos de valores:

a) 9 — 10 — 10 — 10 — 10 — 12 — 12 — 15
b) 4 — 7 — 8 — 8 — 9 — 9 — 10 — 17
c) 3 — 3 — 3 — 4 — 4 — 5 — 6
d) 60 — 61 — 62 — 63 — 64

376. A expressão seguinte representa o numerador da expressão que define o desvio médio de uma variável:

$2 \cdot |8 - 10| + 3 \cdot |9 - 10| + n \cdot |10 - 10| + 2 \cdot |12 - 10| + m \cdot |13 - 10|$

a) Qual é a média dos valores dessa variável?
b) Se o desvio médio encontrado é 1,4, quais são os valores de n e m?

377. Os dados ao lado referem-se aos percentuais de matrículas feitas no ensino médio em escolas públicas nas regiões Sul e Sudeste.

a) Calcule o desvio médio desses percentuais.
b) Qual região, a Sul ou a Sudeste, apresenta dados mais homogêneos, considerando-se o desvio médio como medida de dispersão?

Espírito Santo	85,3%
Minas Gerais	89,4%
Paraná	89,4%
Rio de Janeiro	79,6%
Rio Grande do Sul	86,0%
Santa Catarina	85,1%
São Paulo	86,6%

Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

378. Responda:

a) O que aconteceria com o desvio médio se fossem retirados os módulos da definição?
b) Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ um conjunto de valores assumidos por uma variável. Mostre que a expressão do desvio médio e da variância coincidem quando todos os valores são iguais ou se $|x_i - \overline{x}| = 1, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

XVI. Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados

Em uma academia de ginástica deseja-se implantar um programa de racionamento de energia elétrica, que inclui, entre outras medidas, uma campanha de incentivo à redução do tempo de banho nos vestiários. Durante uma semana, registrou-se o tempo de duração dos banhos dos usuários.

Os dados coletados estão organizados na tabela:

Tempo de duração (em minutos)	Freqüência absoluta
1 ⊢ 4	18
4 ⊢ 7	108
7 ⊢ 10	270
10 ⊢ 13	150
13 ⊢ 16	54
Total	**600**

Como encontramos as medidas de centralidade (média, mediana e moda) e variabilidade (desvio padrão e variância) relativas a esses dados?

Quando as informações referentes a uma variável estão agrupadas em classes de valores (intervalos), não é possível saber como os valores estão distribuídos em cada faixa. Como recurso para associar medidas a esses dados, costuma-se fazer a suposição de que, em cada intervalo, os valores estão distribuídos homogeneamente, isto é, admite-se uma distribuição aproximadamente simétrica ao redor do ponto médio do intervalo. Assim, se um determinado intervalo contém n valores, há uma "compensação" entre valores eqüidistantes do ponto médio (x_i) da classe i, de modo que a média entre eles coincide com x_i.

Essas considerações nos levam a supor que as n observações do intervalo equivalem ao seu ponto médio.

15. *Cálculo da média*

Seja x_i o ponto médio de um determinado intervalo.

Retomando o exemplo da academia de ginástica que pretende implantar um programa de racionamento de energia elétrica, temos esta tabela:

Tempo de duração (minutos)	Ponto médio (x_i)	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)
1 ⊢ 4	$x_1 = 2,5$	$n_1 = 18$	$\frac{18}{600} = 0,03$
4 ⊢ 7	$x_2 = 5,5$	$n_2 = 108$	$\frac{108}{600} = 0,18$
7 ⊢ 10	$x_3 = 8,5$	$n_3 = 270$	$\frac{270}{600} = 0,45$
10 ⊢ 13	$x_4 = 11,5$	$n_4 = 150$	$\frac{150}{600} = 0,25$
13 ⊢ 16	$x_5 = 14,5$	$n_5 = 54$	$\frac{54}{600} = 0,09$

O tempo médio de banho é dado por:

$\overline{x} = \frac{18 \cdot 2,5 + 108 \cdot 5,5 + 270 \cdot 8,5 + 150 \cdot 11,5 + 54 \cdot 14,5}{600} = 9,07$ minutos (ou aproximadamente 9 minutos e 4 segundos)

Em geral, a média para dados agrupados é dada por:

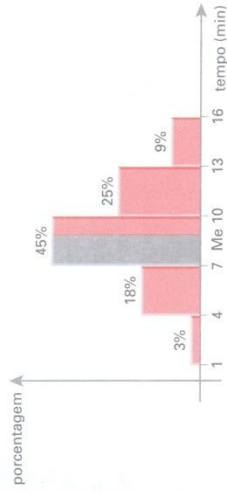
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$, sendo $\begin{cases} k \text{ o número de intervalos} \\ x_i \text{ o ponto médio da classe } i \\ n_i \text{ a freqüência absoluta referente à classe } i \end{cases}$

ou

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i$$, sendo f_i a freqüência relativa referente à classe i

16. *Cálculo da mediana*

Em variáveis contínuas que apresentam seus valores distribuídos em intervalos, admite-se que 50% dos dados encontram-se abaixo da mediana e 50% acima dela.

Nesses casos, para determinar a mediana, é importante, num primeiro momento, construir um histograma, usando a freqüência relativa (ou porcentagem) de cada intervalo. Em relação ao exemplo da academia de ginástica, temos:

A mediana desse conjunto de dados é um valor pertencente ao intervalo 7 ⊢ 10, uma vez que a freqüência acumulada das duas primeiras classes é 3% + 18% = 21% e das três primeiras classes é 3% + 18% + 45% = 66%.

Observe que, no terceiro intervalo, o retângulo sombreado e o retângulo "inteiro" (que define o intervalo) têm a mesma altura. Assim, a área de cada um desses retângulos (expressa como porcentagem da área total sob o histograma) é proporcional à medida de sua base.

Temos:

- retângulo sombreado $\begin{cases} \text{base: Me} - 7 \\ \text{área: } 50\% - 21\% \end{cases}$
- retângulo "inteiro" $\begin{cases} \text{base: } 10 - 7 \\ \text{área: } 45\% \end{cases}$

Segue, daí, a seguinte proporção:

$\frac{Me - 7}{50\% - 21\%} = \frac{10 - 7}{45\%} \Rightarrow Me \cong 8,93$ minutos (aproximadamente 8 minutos e 55 segundos)

17. Cálculo da classe modal

Suponha que os dados de uma variável contínua estejam distribuídos em classes de mesma amplitude.

A *classe modal* é dada pela classe que reúne a maior freqüência (absoluta ou relativa).

No exemplo, a classe de maior freqüência é a de 7 a 10 minutos, e ela concentra 270 valores (ou 45% dos dados da amostra).

Dizemos que a classe modal é o intervalo 7 ⊢ 10 (minutos).

18. Cálculo da variância e do desvio padrão

O cálculo da variância e do desvio padrão de uma variável que apresenta seus valores distribuídos em intervalos utiliza a mesma hipótese usada no cálculo da média: dentro de cada intervalo, os valores estão homogeneamente distribuídos.

Consideremos a situação de distribuição de salários de uma empresa com 200 funcionários, representada na tabela:

Faixa salarial (em salários mínimos)	Ponto médio (x_i)	Número de funcionários (freqüência absoluta: n_i)
2 ⊢ 6	4	45
6 ⊢ 10	8	63
10 ⊢ 14	12	36
14 ⊢ 18	16	31
18 ⊢ 22	20	17
22 ⊢ 26	24	8

Temos:

- $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{6} n_i} = \frac{4 \cdot 45 + 8 \cdot 63 + 12 \cdot 36 + 16 \cdot 31 + 20 \cdot 17 + 24 \cdot 8}{200} =$$

$$= \frac{180 + 504 + 432 + 496 + 340 + 192}{200} = \frac{2\,144}{200} = 10{,}72 \text{ SM}$$

- Para cada intervalo, avaliamos o desvio quadrático do ponto médio correspondente em relação à média encontrada:

Intervalo	Ponto médio	Desvio quadrático
2 ⊢ 6	4	$(4 - 10{,}72)^2 = 45{,}16$
6 ⊢ 10	8	$(8 - 10{,}72)^2 = 7{,}39$
10 ⊢ 14	12	$(12 - 10{,}72)^2 = 1{,}64$
14 ⊢ 18	16	$(16 - 10{,}72)^2 = 27{,}88$
18 ⊢ 22	20	$(20 - 10{,}72)^2 = 86{,}11$
22 ⊢ 26	24	$(24 - 10{,}72)^2 = 176{,}36$

- Fazemos a média desses desvios, ponderando-os pelas freqüências absolutas correspondentes, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{45 \cdot 45{,}16 + 63 \cdot 7{,}39 + 36 \cdot 1{,}64 + 31 \cdot 27{,}88 + 17 \cdot 86{,}11 + 8 \cdot 176{,}36}{200}$$

$$\sigma^2 = \frac{2\,032{,}2 + 465{,}57 + 59{,}04 + 864{,}28 + 1\,463{,}87 + 1\,410{,}88}{200}$$

$$\sigma^2 = \frac{6\,295{,}84}{200} \cong 31{,}48 \text{ SM}^2$$

Logo, o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{31{,}84} \Rightarrow \sigma \cong 5{,}64$ SM.

Em geral, quando uma variável apresenta seus valores distribuídos em *k* intervalos, a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

, sendo

- x_i o ponto médio do intervalo *i*;
- $\overline{x}$ a média aritmética;
- n_i a freqüência absoluta referente ao intervalo *i*.

Usando a freqüência relativa $\left(f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \right)$, podemos escrever:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$$

EXERCÍCIOS

379. As alturas de um grupo de atletas de um clube estão relacionadas na tabela seguinte:

Altura (em metros)	Número de atletas
1,64 ⊢ 1,70	8
1,70 ⊢ 1,76	88
1,76 ⊢ 1,82	104
1,82 ⊢ 1,88	136
1,88 ⊢ 1,94	40
1,94 ⊢ 2,00	24
Total	**400**

a) Determine a média, a classe modal e a mediana dos dados apresentados.
b) Encontre a variância e o desvio padrão desses dados.

380. Os 200 funcionários de uma empresa foram submetidos a exames clínicos para avaliação de saúde. Na tabela seguinte, aparece o resultado do exame de dosagem de colesterol.

Colesterol (em mg/dℓ de sangue)	Número de funcionários
140 ⊢ 180	21
180 ⊢ 220	45
220 ⊢ 260	73
260 ⊢ 300	34
300 ⊢ 340	27

a) Qual é a taxa mediana de colesterol, em mg, por dL de sangue?
b) O teste sugere que, se a taxa média de colesterol exceder 235 mg/dL de sangue, deve-se iniciar uma campanha de prevenção com os funcionários. Com base nesse exame, verifique se será necessário iniciar a campanha preventiva.

381. A seguir, são dados os percentuais da população dos Estados brasileiros que vive em áreas urbanas.

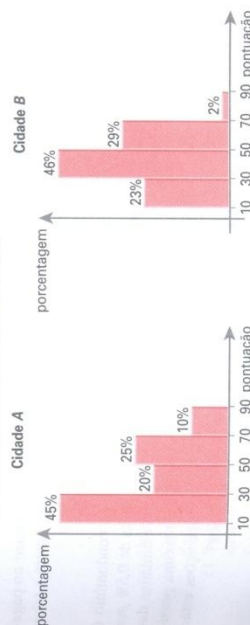
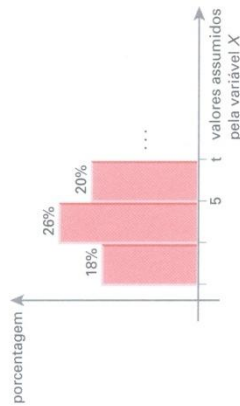
Acre	66,4%	Maranhão	59,5%	Rio de Janeiro	96,0%
Alagoas	68,0%	Mato Grosso	79,4%	Rio Grande do Norte	73,3%
Amapá	89,0%	Mato Grosso do Sul	84,1%	Rio Grande do Sul	81,7%
Amazonas	74,8%	Minas Gerais	82,0%	Rondônia	64,1%
Bahia	67,1%	Pará	66,5%	Roraima	76,1%
Ceará	71,5%	Paraíba	71,1%	Santa Catarina	78,7%
Distrito Federal	95,7%	Paraná	81,4%	São Paulo	93,4%
Espírito Santo	79,5%	Pernambuco	76,5%	Sergipe	71,4%
Goiás	87,9%	Piauí	62,9%	Tocantins	74,3%

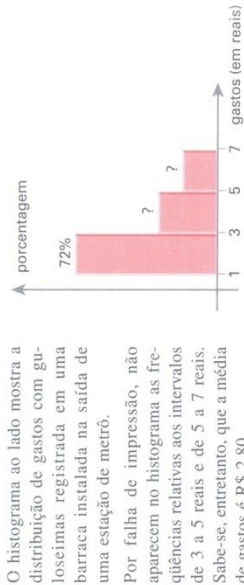
Fonte: *Almanaque Abril*, 2002.

a) Agrupe essas informações em quatro intervalos, cada um com amplitude igual a 10, a partir do valor 59, e faça uma tabela de freqüência.
b) Utilizando os dados agrupados, calcule a média e o desvio padrão. Quantos valores não pertencem ao intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$?

382. Em um determinado Estado foi realizado nas suas duas maiores cidades, *A* e *B*, um levantamento sobre o grau de satisfação da população em relação à administração do governador. Um dos objetivos do levantamento era verificar se havia diferenças significativas quanto à opinião dos moradores das duas cidades. Cada entrevistado atribuiu uma nota de 0 a 100 para expressar sua satisfação.

Adotou-se o seguinte critério de avaliação: caso a diferença entre as notas médias obtidas nas duas cidades não excedesse 5 (em módulo), a conclusão seria de que não havia diferenças significativas.

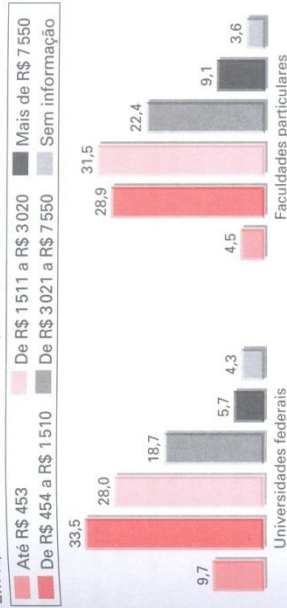
Com base nos dados apresentados a seguir, conclua se há divergência entre a opinião dos moradores de uma cidade e outra.

383. A figura mostra os três primeiros intervalos de um histograma que representa a distribuição de uma variável X, acompanhados das respectivas freqüências. Se a mediana desses dados é 6,2, determine o valor de t.

384. O histograma ao lado mostra a distribuição de gastos com guloseimas registrada em uma barraca instalada na saída de uma estação de metrô.

Por falha de impressão, não aparecem no histograma as freqüências relativas aos intervalos de 3 a 5 reais e de 5 a 7 reais. Sabe-se, entretanto, que a média de gastos é R$ 2,80.

a) Determine os valores relativos às freqüências que não aparecem no gráfico.
b) Qual é a variância correspondente?

385. A administradora de um condomínio residencial relacionou o atraso no pagamento das cotas condominiais relativas a certo mês, conforme mostra a tabela seguinte:

Dias de atrasos	Número de apartamentos
0	48
1 a 9	30
10 a 18	24
19 a 27	18

Sabe-se que o valor do condomínio é R$ 200,00 e que há multa de 0,5% *por dia* de atraso. Faça uma estimativa das arrecadações mínima e máxima possíveis nesse mês. Que suposições estão envolvidas nesses cálculos?

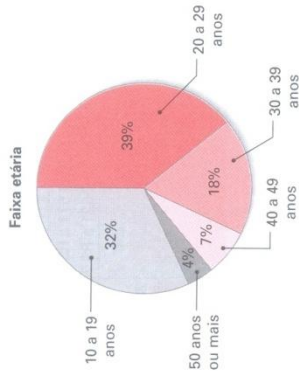
386. Deseja-se comparar a renda familiar média dos universitários nas duas situações retratadas pelos gráficos.

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 28/10/2001.

a) Quais as dificuldades que você encontra para fazer esse cálculo?
b) Calcule a média em cada caso, admitindo que, no primeiro intervalo, a renda varia de R$ 200,00 a R$ 453,00 e, no último intervalo, de R$ 7 550,00 a R$ 10 000,00. Despreze o último intervalo (sem informação), isto é, faça os cálculos sobre 95,7% e 96,4%, respectivamente.

387. Um radar fotográfico, instalado em uma rodovia na qual o limite de velocidade é 100 km/h, registrou em uma semana x multas por excesso de velocidade, assim distribuídas:

Velocidade (em km/h)	Número de ocorrências
101 ⊢ 108	34
108 ⊢ 115	41
115 ⊢ 122	35
122 ⊢ 129	22
129 ⊢ 136	18

a) Determine o valor de x.
b) Calcule a média, a classe modal, a mediana e o desvio padrão da velocidade em que estavam os veículos quando foram multados.
c) Se o valor das multas varia de acordo com a faixa de velocidade ultrapassada, começando por R$ 180,00 e aumentando sempre 20% em relação à faixa anterior, determine o valor médio das multas aplicadas.

388. O gráfico seguinte mostra a distribuição dos espectadores de cinema, segundo faixas etárias, na Grande São Paulo.

Fonte: *Veja São Paulo*, 14/5/2003.

a) Admitindo que a classe de menor freqüência tenha seus valores na faixa de 50 a 59 anos, determine a idade média dos espectadores.

b) Faça o cálculo da média supondo que os valores da classe de menor freqüência pertençam ao intervalo [50, 65].

389. Um professor aplicou um teste de raciocínio lógico nas suas duas turmas do 3º ano do ensino médio. As notas obtidas pelos alunos são dadas a seguir:

Turma *A*

4,0	4,8	6,2	7,7	3,0	5,5	6,2	1,5	7,5	4,0	9,5	8,1	5,0	7,4	6,7	6,4	5,8	7,0	8,7	8,5
4,7	5,1	6,1	8,7	6,3	7,5	8,3	3,5	2,8	4,5	6,5	7,5	6,4	4,8	8,0	8,7	7,6	2,0	1,9	5,6

Turma *B*

9,0	0,3	8,7	7,6	6,0	5,7	8,8	3,7	2,0	2,2	8,4	3,1	7,8	4,2	9,8	6,5	1,2	2,4	4,0	3,1
7,5	8,7	1,8	2,4	6,0	3,2	5,2	5,5	5,9	6,9	8,2	7,9	8,5	8,8	7,0	6,3	9,3	7,5	8,6	9,8

a) Em cada turma, divida os alunos em cinco categorias de aproveitamento — péssimo, fraco, regular, bom e ótimo —, estabelecendo os limites de cada uma. A seguir, faça uma tabela de freqüências.

b) Utilizando *apenas* os dados agrupados, responda:
- Qual turma apresentou melhor aproveitamento?
- Qual turma apresentou desempenho mais regular?

390. Um provedor da Internet desejava saber o tempo (em minutos) de acesso diário de seus assinantes à rede. Para isso, encomendou uma pesquisa com 80 pessoas, cujas informações sobre o tempo de acesso diário estão relacionadas a seguir:

39 — 52 — 99 — 125 — 81 — 87 — 175 — 71 — 77 — 41 — 20 — 63 — 89 — 72
61 — 91 — 140 — 18 — 72 — 15 — 43 — 27 — 92 — 35 — 55 — 50 — 17 — 130
62 — 115 — 32 — 24 — 161 — 96 — 192 — 80 — 54 — 50 — 20 — 86 — 51
129 — 96 — 19 — 163 — 21 — 55 — 98 — 135 — 100 — 123 — 23 — 170 — 143
128 — 84 — 71 — 37 — 232 — 64 — 15 — 158 — 105 — 103 — 76 — 42 — 110
112 — 86 — 65 — 47 — 200 — 57 — 80 — 34 — 84 — 38 — 67 — 78 — 114

a) Agrupe as informações em oito classes de amplitude igual a 30 minutos e faça um histograma correspondente.

b) Usando os dados agrupados, encontre as três medidas de centralidade correspondentes ao tempo de acesso.

c) A partir do histograma construído no item *a*, construa um novo histograma, agrupando os tempos de hora em hora. Em seguida, encontre as três medidas de centralidade.

391. A tabela seguinte mostra a evolução do índice de desenvolvimento humano (IDH) em uma década no Brasil.

***Ranking* dos Estados**

	IDH	
	1991	2000
Acre	0,624	0,697
Alagoas	0,548	0,649
Amapá	0,691	0,753
Amazonas	0,664	0,713
Bahia	0,590	0,688
Ceará	0,593	0,700
Distrito Federal	0,799	0,844
Espírito Santo	0,690	0,765
Goiás	0,700	0,776
Maranhão	0,543	0,636
Mato Grosso	0,685	0,773
Mato Grosso do Sul	0,716	0,778
Minas Gerais	0,697	0,773
Pará	0,650	0,723

	IDH	
	1991	2000
Paraíba	0,561	0,661
Paraná	0,711	0,787
Pernambuco	0,620	0,705
Piauí	0,566	0,656
Rio de Janeiro	0,753	0,807
Rio Grande do Norte	0,604	0,705
Rio Grande do Sul	0,753	0,814
Rondônia	0,660	0,735
Roraima	0,692	0,746
Santa Catarina	0,748	0,822
São Paulo	0,778	0,820
Sergipe	0,597	0,682
Tocantins	0,611	0,710

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 3/10/2003.

a) Em relação às duas datas mencionadas, agrupe os Estados em classes de amplitude igual a 0,1 e faça uma tabela de freqüências correspondente.

b) Utilizando os dados agrupados, compare as médias de IDH dos dois períodos.

c) Qual foi o aumento percentual registrado na média calculada no item anterior?

d) Utilizando os dados agrupados, encontre o desvio padrão do IDH em 2000.

392. Os dados seguintes referem-se às taxas de ocupação de um teatro durante os cinqüenta dias em que uma peça ficou em cartaz.

30% — 43% — 66% — 57% — 72% — 78% — 38% — 61% — 59% — 53%
62% — 49% — 82% — 68% — 59% — 45% — 60% — 65% — 73% — 76%
70% — 64% — 68% — 75% — 80% — 62% — 54% — 71% — 82% — 49%
55% — 60% — 66% — 72% — 70% — 60% — 58% — 64% — 50% — 83%
82% — 56% — 79% — 80% — 71% — 88% — 84% — 80% — 70% — 55%

a) Organize os dados em cinco intervalos de amplitude igual a 10, a partir do menor valor encontrado, e faça uma tabela de freqüências correspondente.

b) Utilizando os dados agrupados, encontre a média dos percentuais relacionados acima.

c) Suponha que a peça tenha ficado em cartaz por mais n dias, numa longa temporada de preços populares. Nessa temporada, verificou-se que a ocupação da sala, em cada dia, nunca foi inferior a 80%, mas não chegou a 90%. Qual deve ser o menor valor de n para que a média de ocupação de *todo o período* seja no mínimo de 80%?

393. A tabela seguinte informa a quantidade diária de reclamações recebidas por um órgão de defesa do consumidor durante um ano.

Número de queixas	Número de dias
0 ⊢ 40	30
40 ⊢ 80	75
80 ⊢ 120	120
120 ⊢ 160	95
160 ⊢ 200	40
Total	**360**

Determine o percentual de dias em que foram registradas menos de 110 reclamações.

Solução

Os dois primeiros intervalos reúnem 30 + 75 = 105 dias, em que foram registradas até 80 queixas. Por outro lado, não sabemos de que modo as 120 ocorrências estão distribuídas no intervalo de 80 a 120 queixas.

Admitindo novamente uma distribuição uniforme dentro do intervalo, podemos separar o terceiro intervalo em subintervalos de amplitude 10:

80 ⊢ 90	30 dias
90 ⊢ 100	30 dias
100 ⊢ 110	30 dias
110 ⊢ 120	30 dias

Assim, em 30 + 30 + 30 = 90 dias foram registradas de 80 a 110 queixas.

Por fim, o percentual de dias procurado é:

$$\frac{105 + 90}{360} = \frac{195}{360} \cong 54{,}1\%$$

394. A tabela seguinte mostra um levantamento sobre o público pagante nas duas primeiras rodadas (40 jogos) do Campeonato Brasileiro de Futebol.

Público pagante	Número de jogos
1 000 ⊢ 7 000	3
7 000 ⊢ 13 000	4
13 000 ⊢ 19 000	9
19 000 ⊢ 25 000	12
25 000 ⊢ 31 000	6
31 000 ⊢ 37 000	4
37 000 ⊢ 43 000	2
Total	**40**

a) Qual é o número estimado de jogos que apresentaram público pagante inferior a 15 000 pessoas?

b) Qual é o número estimado de jogos que apresentaram público pagante de pelo menos 20 000 pessoas?

395. A pontuação dos 100 000 alunos que fizeram a primeira fase de um exame vestibular está mostrada na tabela seguinte.
Observação: Só são possíveis pontos *inteiros*.

Número de pontos	Número de alunos
0 ⊢ 10	1 400
10 ⊢ 20	6 900
20 ⊢ 30	13 000
30 ⊢ 40	14 500
40 ⊢ 50	19 300
50 ⊢ 60	16 800
60 ⊢ 70	11 400
70 ⊢ 80	10 700
80 ⊢ 90	5 100
90 ⊢ 100	900
Total	**100 000**

Estime a proporção de alunos que obtiveram:

a) pelo menos 55 pontos; b) menos de 37 pontos; c) 88 pontos ou mais.

396. Os dados seguintes, coletados durante uma semana em um hospital veterinário, referem-se aos "pesos" de 160 cachorros recém-nascidos.

"Peso" (em kg)	Número de cachorros recém-nascidos
0 ⊢ 0,5	6
0,5 ⊢ 1,0	9
1,0 ⊢ 1,5	21
1,5 ⊢ 2,0	30
2,0 ⊢ 2,5	42
2,5 ⊢ 3,0	27
3,0 ⊢ 3,5	20
3,5 ⊢ 4,0	4
4,0 ⊢ 4,5	1
Total	**160**

Estime a proporção de cachorros recém-nascidos com "pesos" pertencentes ao intervalo [1,7; 3,3[.

XVII. Outras medidas de separação de dados

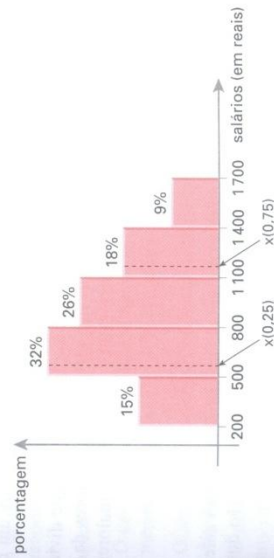
Vimos no item XII que a mediana é um valor que divide um conjunto de dados em duas partes. Vamos agora ver outras medidas de separação de dados (ou separatrizes):

19. Quartis

Seja x uma variável quantitativa cujos valores estão agrupados em classes (intervalos).

- O *primeiro quartil*, indicado por x(0,25), é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes tais que:
  — 25% dos valores assumidos por x são menores ou iguais a x(0,25);
  — 75% dos valores assumidos por x são maiores ou iguais a x(0,25).
- O *segundo quartil*, indicado por x(0,50), é o valor correspondente à mediana.
- O *terceiro quartil*, indicado por x(0,75), é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes tais que:
  — 75% dos valores assumidos por x são menores ou iguais a x(0,75);
  — 25% dos valores assumidos por x são maiores ou iguais a x(0,75).

Exemplo

Os salários dos funcionários de um supermercado estão mostrados no histograma seguinte:

Vejamos como determinar x(0,25) e x(0,75).

• Cálculo de x(0,25):

As duas primeiras classes reunidas concentram 15% + 32% = 47% dos salários dos funcionários.

Assim, o primeiro quartil, x(0,25), pertence ao segundo intervalo. Analogamente ao cálculo da mediana, podemos escrever:

$$\frac{x(0,25) - 500}{25\% - 15\%} = \frac{800 - 500}{32\%} \Rightarrow x(0,25) = 593,75$$

Isso significa que, no conjunto dos salários de todos os funcionários do supermercado, 25% são menores que R$ 593,75 e 75% são maiores que esse valor.

• Cálculo de x(0,75):

As três primeiras faixas salariais concentram 15% + 32% + 26% = 73% dos salários.

Desse modo, o terceiro quartil é um valor que pertence ao intervalo 1 100 ⊢ 1 400, pois os quatro primeiros intervalos contêm 91% dos salários.

Temos:

$$\frac{x(0,75) - 1\,100}{75\% - 73\%} = \frac{1\,400 - 1\,100}{18\%} \Rightarrow x(0,75) \cong 1\,133,34$$

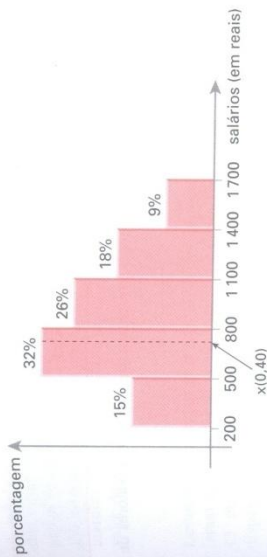
Isso significa que, no conjunto dos salários de todos os funcionários do supermercado, os 25% mais altos estão na faixa de R$ 1 133,34 a R$ 1 700,00.

20. *Decis*

Com base na mesma idéia de quartis, é possível dividir um conjunto de dados agrupados em duas partes usando os *decis*.

Em geral, o *n-ésimo decil* (n = 1, 2, ..., 9) é um valor que divide o conjunto de dados em duas partes tais que (10 · n)% dos valores da distribuição são menores ou iguais a ele e (100 − 10 · n)% são maiores ou iguais a ele.

Exemplo

Considerando o histograma apresentado no exemplo do item anterior, vejamos como determinar o *quarto decil* em relação à distribuição dos salários dos funcionários do supermercado.

O quarto decil, x(0,4), é um valor pertencente à faixa 500 ⊢ 800.

Temos:

$$\frac{x(0,4) - 500}{40\% - 15\%} = \frac{800 - 500}{32\%} \Rightarrow x(0,4) \cong 734,38$$

O valor 734,38 divide o conjunto de salários em duas partes tais que uma delas contém os 40% dos salários mais baixos — de 200 a 734,38 reais — e a outra parte — de 734,38 a 1 700 reais — reúne os 60% dos salários mais altos.

21. *Percentis*

Com base na mesma idéia de quartis e decis, é possível dividir um conjunto de dados agrupados em duas partes usando os *percentis*.

O *n-ésimo percentil* (n = 1, 2, ..., 99) é um valor que divide o conjunto de dados em duas partes tais que n% dos valores da distribuição são menores ou iguais a ele e (100 − n)% são maiores ou iguais a ele.

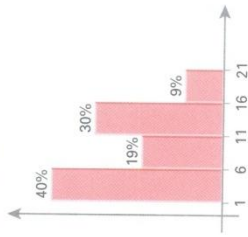
Exemplos

1º) O *décimo quarto percentil* é indicado por x(0,14); 14% dos dados são menores que x(0,14) e 86% são maiores que x(0,14).

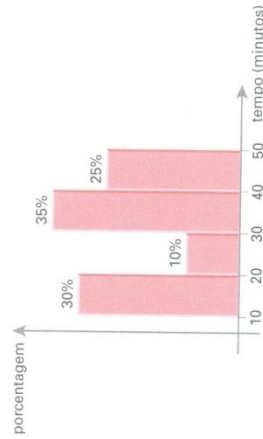
2º) O *sexagésimo percentil* (ou sexto decil) é indicado por x(0,60); 60% dos dados são menores que x(0,60) e 40% são maiores que x(0,60).

O cálculo de percentis segue exatamente as proporções apresentadas nos cálculos relativos a quartis e decis.

EXERCÍCIOS

397. Observe o gráfico seguinte, que representa a distribuição de valores de uma variável quantitativa.

Determine:

a) o primeiro quartil;
b) o terceiro decil;
c) o segundo quartil;
d) o oitavo decil.

398. Os dados seguintes, coletados em uma manhã de nevoeiro em um aeroporto, referem-se ao tempo de atraso na decolagem dos vôos.

Determine:

a) o tempo médio de atraso em cada vôo naquela manhã;
b) o intervalo interquartil, isto é, o intervalo [x(0,25); x(0,75)];
c) o sexto decil;
d) o valor de n, considerando que n seja o tempo de atraso em minutos em noventa por cento dos vôos.

399. A tabela ao lado informa a distribuição das notas obtidas por uma turma em uma prova de Estatística.
Do conjunto de todas as notas, as 25% maiores *não* são inferiores a x. Qual é o valor de x?

Nota	Porcentagem (%)
0 ⊢ 2	7,50
2 ⊢ 4	33,75
4 ⊢ 6	30,00
6 ⊢ 8	20,00
8 ⊢ 10	8,75

400. Levantamentos realizados com alunos e funcionários de uma faculdade revelaram que a média de tempo diário gasto com a leitura de jornais não excedia 15 minutos. Para incentivar o hábito da leitura, cada departamento disponibilizou alguns exemplares de jornais em suas bibliotecas. Uma nova pesquisa foi realizada semanas após o início da experiência, a fim de verificar se alguma mudança havia ocorrido. Os resultados são mostrados na tabela.

Tempo de leitura	Porcentagem (%)
0 ⊢ 5	7,0
5 ⊢ 10	19,5
10 ⊢ 15	33,5
15 ⊢ 20	28,5
20 ⊢ 25	10,5
25 ⊢ 30	1,0
Total	**100**

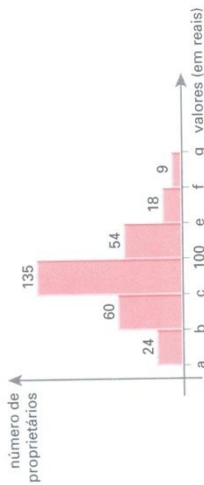
a) A medida tomada com o propósito de incentivar a leitura surtiu efeito, isto é, elevou a média histórica de tempo diário de leitura?
b) Para verificar a conveniência de repetir essa estratégia em outro momento, adotou-se o seguinte critério: 75% dos leitores deveriam dedicar, no mínimo, 8 minutos diários à leitura. Com base nos resultados obtidos, verifique se o procedimento adotado possibilitou atingir a meta estabelecida.

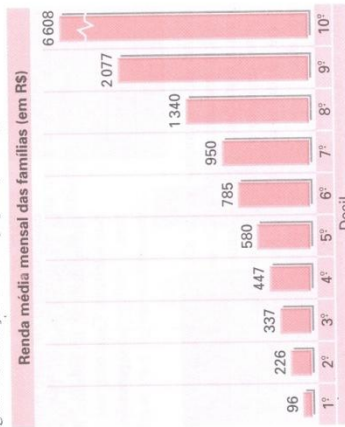
401. Peixes de uma determinada espécie são vendidos a um restaurante. A tabela ao lado informa a distribuição, em porcentagem, do "peso" de certo número de peixes dessa espécie vendidos ao restaurante em determinado dia.
Peixes de "peso" reduzido entram no preparo de pratos com acompanhamentos. Por essa razão, o gerente do restaurante propôs a separação dos peixes em três categorias, de forma que:

"Peso" (em gramas)	Porcentagem (%)
50 ⊢ 100	2,5
100 ⊢ 150	30,0
150 ⊢ 200	27,5
200 ⊢ 250	35,0
250 ⊢ 300	5,0

- os 20% mais leves pertençam à classe A;
- os 50% de "peso" intermediário pertençam à classe B;
- os 30% mais pesados pertençam à classe C.

Determine os limites aproximados de "peso" que definem cada uma dessas classes.

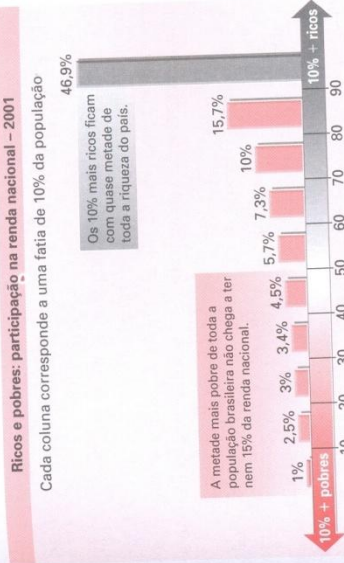
402. No gráfico seguinte estão representados os valores das despesas mensais com combustível relacionadas por 300 proprietários de veículos.

Sabendo que 20% dos proprietários gastam até 58 reais e 30% deles gastam no mínimo 98 reais, determine os valores de b e c. Que suposição deve ser feita a fim de que seja possível encontrar os valores de a, e, f e g?

403. O gráfico a seguir mostra a renda média mensal das famílias brasileiras e a sua desigual distribuição entre a população do país.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 12/5/2003.

a) Qual é a renda familiar média mensal dos 10% mais pobres?

b) Entre as famílias brasileiras, as 20% mais ricas têm renda média mensal superior a x reais. Qual é o valor de x?

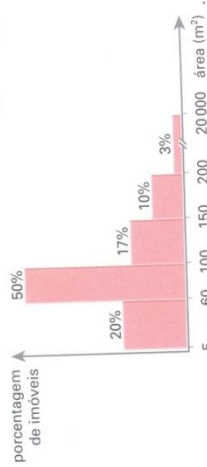
c) O intervalo (a, b) contém os valores da renda mensal cuja média é superior à média dos 20% mais pobres e inferior à média dos 30% mais ricos. Determine a e b.

404. Complete corretamente as afirmações seguintes, de acordo com o gráfico.

Fonte: *Almanaque Abril* — atualidades de vestibular, 2004.

a) A metade mais pobre de toda a população brasileira detém ▲% de toda a renda do país.

b) Os 20% mais ricos de toda a população concentram ▲% de toda a renda do país.

c) O intervalo compreendido entre o 3º e o 8º decil reúne ▲% da renda nacional.

405. (EEM-SP) O histograma abaixo refere-se às áreas dos imóveis de um pequeno município.

O prefeito pretende isentar do pagamento do imposto predial e territorial urbano (IPTU) os proprietários dos imóveis de menor área, até o limite de 30% dos imóveis do município. Determine a área máxima de um imóvel para que seu proprietário fique isento do pagamento do IPTU.

LEITURA

Florence Nightingale e os gráficos estatísticos

É inegável a importância que os gráficos estatísticos adquiriram nos dias de hoje, nas mais variadas áreas do conhecimento, principalmente em virtude da existência de diversos aplicativos computacionais relativamente simples de serem operados. Isso se deve ao seu grande poder de concisão e forte apelo visual.

Nos livros, revistas, jornais e relatórios, os gráficos são de fácil entendimento para a maior parte das pessoas. Geralmente são considerados até mais compreensíveis do que as tabelas.

Além de serem utilizados como meio rápido e fácil de comunicação, os gráficos estatísticos também são úteis na busca de padrões de comportamento e relações entre variáveis, na descoberta de novos fenômenos, na aceitação ou rejeição de hipóteses, etc.

Florence Nightingale (1820-1910).

Florence Nightingale foi uma das pioneiras na utilização dos gráficos estatísticos. Nasceu em Villa Colombia, próximo de Florença, na Itália, em maio de 1820. Seus pais eram de origem britânica e estavam viajando pela Europa quando ela nasceu.

Apresentou, desde cedo, uma forte inclinação para o estudo de Matemática. Gostava de indicar por números tudo que pudesse ser registrado, tal como distâncias, tempos de viagem, orçamentos, etc. No entanto, Nightingale sofreu forte oposição dos pais, que, por fim, cederam aos anseios da filha. Assim, ela conseguiu realizar seus sonhos de estudo e ainda preparou-se para exercer a Enfermagem.

É freqüentemente lembrada como uma das fundadoras da profissão de enfermeira e reformadora dos sistemas de saúde. Atuou como enfermeira-chefe do Exército britânico de 1854 a 1856, durante a Guerra da Criméia (Inglaterra, França e Turquia se uniram contra a Rússia por problemas territoriais), na qual constatou que a falta de higiene e as doenças hospitalares matavam grande número de soldados internados.

Conseguiu, com suas reformas, reduzir significativamente a a taxa de mortalidade no hospital onde atuou. Famosa pelo seu talento profissional, passou a trabalhar ativamente pela reforma dos sistemas de saúde e pelo desenvolvimento da Enfermagem. Em 1860, publicou seu livro mais importante, *Notas sobre Enfermagem*, no qual enfatizou os modernos princípios da Enfermagem.

Florence Nightingale utilizou-se dos dados estatísticos, quer em forma de tabelas, quer em forma de gráficos, como ferramenta para suas atividades de reforma na área de saúde. A base para a utilização do ferramental estatístico ela já possuía, em virtude do conhecimento prévio de Matemática e da habilidade para trabalhar com números, além do conhecimento dos aspectos médicos ligados à sua atividade.

Ela utilizou os gráficos estatísticos (gráficos de freqüência, freqüências acumuladas, histogramas e outros) com a finalidade de expressar suas idéias para membros do Exército e do governo. Seus gráficos foram tão criativos que se constituíram num marco do desenvolvimento da Estatística. Seu trabalho foi tão importante que, em 1858, ela foi a primeira mulher eleita membro da Associação Inglesa de Estatística.

Durante a Guerra Civil Americana, Nightingale foi conselheira de saúde nos Estados Unidos, na área militar. Também trabalhou como conselheira de saúde do governo britânico no Canadá.

Em 1883, recebeu uma condecoração (Cruz Vermelha Real) da rainha Vitória por seus relevantes serviços prestados à saúde.

Em 1907, foi a primeira mulher a receber das mãos do rei Eduardo VII a Ordem do Mérito. Faleceu em Londres, em agosto de 1910, aos 90 anos.

LEITURA

Jerzy Neyman e os intervalos de confiança

Quando estamos às vésperas de uma eleição é comum ouvirmos notícias do tipo: a porcentagem de votos de fulano é 32% com uma margem de erro de 3 pontos percentuais para mais ou menos (ou seja, a porcentagem está dentro do intervalo: 32 ± 3%). Esses intervalos, chamados de intervalos de confiança, são obtidos por pesquisas de opinião feitas por amostragem, selecionando-se alguns milhares de pessoas, mesmo que o conjunto de todos os eleitores seja da ordem de milhões.

Existem intervalos de confiança para diversos parâmetros populacionais, tais como porcentagem, média, variância, diferença de médias, etc. Por exemplo: a fórmula que oferece (sob determinadas condições) o intervalo de confiança de uma média populacional é $\overline{X} \pm 2 \dfrac{S}{\sqrt{n}}$, em que $\overline{X}$ é a média da amostra, S o desvio padrão e n o número de elementos selecionados para a amostra.

Um dos pioneiros no estudo dos intervalos de confiança foi Jerzy Neyman, ao lado de estatísticos renomados como Karl Pearson, Sir Ronald A. Fisher e Egon Pearson.

Jerzy Neyman (1894-1981).

Jerzy Neyman nasceu em abril de 1894 na cidade de Bendery, na atual Moldávia (ex-Rússia). Seus pais eram de origem polonesa e, na época de seu nascimento, a Polônia não existia como país independente (era dividida entre Alemanha, Áustria e Rússia).

Estudou em Kharkov, na Ucrânia, onde começou a interessar-se por Matemática e Estatística. Obteve seu doutorado em 1924, na Universidade de Varsóvia, e sua tese versava sobre problemas probabilísticos aplicados a experimentos agrícolas.

Trabalhou até 1938 na Polônia, antes de emigrar para os Estados Unidos, e fez viagens com objetivos acadêmicos para a França e Inglaterra. Entre 1928 e 1933 desenvolveu, junto com Egon Pearson (filho de Karl Pearson), os fundamentos da teoria dos testes de hipóteses.

Em 1934, Neyman desenvolveu a *teoria de inspeção por amostragem*, que forneceu as bases teóricas para a moderna teoria do controle da qualidade.

Em 1938 ingressou na Universidade da Califórnia, em Berkeley, onde fundou o Laboratório de Estatística de Berkeley. Permaneceu como chefe do laboratório, mesmo após aposentar-se em 1961.

Apesar de sua aposentadoria, Neyman não diminuiu seu ritmo de trabalho. Permaneceu em atividade até o fim de sua longa vida, e um grande número de seus trabalhos foi publicado.

Em 1966, recebeu no Reino Unido a Medalha de Ouro da Sociedade Real de Estatística e, em 1969, recebeu do presidente Johnson a Medalha de Ciência dos Estados Unidos.

Neyman faleceu em agosto de 1981, em Berkeley, aos 87 anos.

APÊNDICE I

Média Geométrica

Dados n ($n \geq 2$) números reais não negativos, x_1, x_2, ..., x_n, define-se a *média geométrica* (G) desses valores pela relação:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}$$

isto é, a média geométrica corresponde à raiz n-ésima do produto desses n números.

Exemplo

Vejamos como, a partir da definição, podemos encontrar a média geométrica entre:

a) 2 e 18

b) 2, 4 e 8

c) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 3 e 6

Calculando, temos:

a) $G = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

b) $G = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $G = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[4]{1} = 1$

EXERCÍCIOS

406. Determine a média geométrica entre:

a) 1 e 4

b) 1, 2 e 4

c) 2, 3 e 9

d) 4 e 5

e) 2^4, 2^9, 2^{11}

f) 0, 1, 2 e 3

g) 1, 1, 1, 1 e 32

h) 2, 3 e $\frac{4}{3}$

i) 6, 6, 6 e 6

407. A média geométrica entre 10, 2 e n é 5. Determine o valor de n.

408. A média aritmética entre n e 4 excede em 0,5 a média geométrica entre esses mesmos valores. Quais os possíveis valores de n?

409. Seja x um número real positivo e considere as potências x, x^2, x^3, ..., x^{10}. Expresse, em função de x, a média geométrica entre essas potências.

410. A média aritmética dos números x, y e 12 é $7,\overline{6}$ e a média geométrica desses números é 6. Determine os valores desconhecidos.

411. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que a média aritmética de a e b é sempre maior ou igual à média geométrica. Em que caso ocorre a igualdade?

Sugestão: Desenvolva $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

412. (Unicap-PE) Sejam a e b números reais positivos, com $a \leq b$. Classifique como V ou F, justificando:

0) A média aritmética de a e b é sempre maior que a.

1) A média geométrica de a e b é sempre menor que b.

2) Se $a < b$, existe um número real c tal que $b = a \cdot c$.

3) Seja $a < b$; representando por MA e MG, respectivamente, as médias aritmética e geométrica de a e b, tem-se $a < MA < MG < b$.

4) Se $b > 1$ e $a = \frac{1}{b}$, então $\frac{a+b}{2} > 1$.

APÊNDICE II

Média Harmônica

Dado um conjunto de valores não nulos, $x_1, x_2, ..., x_n$, define-se a *média harmônica* (*H*) desses valores pela relação:

$$H = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1}$$

isto é, a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos de $x_1, x_2, ..., x_n$.

Exemplo

Vejamos como calcular a média harmônica entre:

a) 3 e 4　　b) 1, 2 e 3　　c) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$

Calculando, temos:

a) A média aritmética entre seus inversos é $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{24}$.

Assim, a média harmônica é $\left(\frac{7}{24}\right)^{-1} = \frac{24}{7} \cong 3{,}42$.

b) A média aritmética dos inversos de 1, 2 e 3 é $\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{11}{18}$.

Logo, $H = \frac{18}{11} \cong 1{,}64$.

c) Temos $H = \left(\frac{4 + 3 + 2}{3}\right)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

EXERCÍCIOS

413. Determine a média harmônica entre:

a) 2 e 5

b) 1 e 2

c) 8, 5 e $\frac{40}{11}$

d) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$

e) -1, -2 e $\frac{1}{3}$

f) 3, 3, 3 e 3

414. Dados *a* e *b* números reais não nulos, mostre que a média harmônica (H) entre eles é dada por $H = \frac{2ab}{a + b}$.

415. A média harmônica entre 5, 6 e *x* é igual a 4,5. Qual é o valor de *x*?

416. A média harmônica entre os números *a* e 6 é igual a 4,8. Determine a média aritmética e a média geométrica entre eles.

417. Sejam *a* e *b* números reais não nulos e *A* e *H* as médias aritmética e harmônica, respectivamente entre eles. Mostre que, quando A = H, então a = b. Vale a recíproca?

418. (UF-GO) Dados os números reais positivos *a* e *b*, sua média harmônica *h* é definida como o inverso da média aritmética dos inversos de *a* e de *b*.

Considerando essa definição, julgue os itens a seguir.

1) Se a = 7 e b = 5, então $h > \sqrt{35}$.

2) Se *b* é o dobro de *a*, então a média harmônica entre *a* e *b* é $\frac{4a}{3}$.

3) Se os números positivos *a*, *b* e *c*, nessa ordem, formam uma progressão aritmética, então $\frac{1}{b}$ é a média harmônica entre $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{c}$.

4) A média harmônica entre dois números positivos e distintos é menor do que a média aritmética desses números.

Respostas dos exercícios

Capítulo I

1. a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{3}{20}$ c) 50 d) $\frac{5}{24}$ e) $\frac{8}{225}$

2. a) 3 b) 2

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$

4. 20 km/L

5. 342 km

6. a) 15 b) $\frac{48}{5}$ c) $\frac{8}{15}$

7. $\frac{13}{15}$

8. $\frac{9}{52}$

9. 27

10. A: R$ 200 000,00
B: R$ 150 000,00

11. R$ 32 000,00 e R$ 48 000,00

12. 140 rapazes

13. R$ 50 000,00

14. a) 125 b) 150 c) 100

15. R$ 3 600,00

16. a) R$ 240,00
b) A: R$ 48,00 e B: R$ 40,00

17. 72 litros

18. Educação: 78 milhões
Segurança pública: 39 milhões
Saúde: 52 milhões

19. m = 14 e $p = \frac{7}{2}$

20. $s = \frac{5}{2}$ e $p = \frac{5}{4}$

21. a = R$ 60,00
b = 18 meses
c = R$ 120,00

22. R$ 1 950,00

23. 25,68 litros

24. Augusto: R$ 3 333,33
César: R$ 4 166,67

25. R$ 4 000,00, R$ 8 000,00 e R$ 10 000,00

26. A: R$ 99 310,34
B: R$ 111 724,14
C: R$ 148 965,52

27. A: R$ 150 000,00
B: R$ 100 000,00
C: R$ 250 000,00

28. 48 horas

29. 6 dias

30. Diminuirá em $\frac{1}{6}$ de seu valor.

31. $\frac{18}{5}$

32. 2

33. $\frac{125}{8}$

34. $\frac{256}{5}$

35. V, V, V, F (a área é proporcional ao quadrado do lado)

36. a) 60% b) 87,5% c) 166,67% d) 4 680% e) 25% f) 160% g) 10%

37. a) 36 b) 144 c) 99 d) 48 e) 85 f) 63

38. a) 38% b) 120

39. 72

40. 10 vezes

41. 80 caixas

42. 400 famílias

43. R$ 7 650,00

44. a) R$ 1 050,00 b) US$ 6 250,00

45. a) R$ 327,00
b) S = 160 + 0,02x (*x* é a venda mensal)

46. R$ 168,00

47. 30%

48. redução de 10%

49. R$ 212,50

50. R$ 3,15

51. R$ 496,80

52. R$ 90,00

53. a) R$ 742,00
b) R$ 719,74
c) R$ 1 540,00

54. a) R$ 2 400,00; R$ 2 640,00 e R$ 2 094,00
b) R$ 12 944,00

55. a) no supermercado *X*
b) no supermercado *Y*

56. F, V, V, F, V

57. a) 80 b) 480 c) 300

58. a) R$ 3 120,00 b) R$ 4 200,00

59. R$ 400,00

60. R$ 60,00

61. a) R$ 15,75 b) 480 m^2

62. a) R$ 135,30 b) R$ 159,65

63. 84%

64. a) 641 472 b) 22 023 872

65. a) R$ 10,00 b) 11 kg e 550 pães

66. F; o custo seria R$ 11,42
F; para 40% a mais
F; pagaria R$ 68,57

67. V, V

68. a) 6% do valor
b) 5% do valor
c) 480% do valor

69. 0,2035x

70. 5 376 candidatos

71. 6%

72. a) 1% b) 4% c) 2% d) 420%

73. a) $p = \frac{10c}{9}$ b) 42,86%

74. a) 21,95% b) 58,33%

75. a) R$ 0,29 b) R$ 685,00

76. a) F (o crescimento foi de 8,33%)
b) V

77. 1) F (o preço é R$ 0,60)
2) V
3) V
4) V

78. R$ 165,60

79. vendas: R$ 180,00; lucro: R$ 36,00

80. R$ 56,80

81. x = 120 unidades; y = 140 unidades

82. a) R$ 1,60 b) 50; 120; 130

83. a) R$ 75,00 b) R$ 3 000,00

84. 1) V
2) F
3) V

85. a) zero
b) R$ 66,30
c) R$ 401,93
d)

Renda	Alíquota	Parcela a deduzir
Até R$ 1 058,00	Isento	——
De R$ 1 058,01 até R$ 2 115,00	15%	R$ 158,70
Acima de R$ 2 115,00	27,5%	R$ 423,08

86. 9 100 homens e 9 400 mulheres

87. 4%

88. 8,4%

89.

Ano	Variação percentual
1998	——
1999	−9,7%
2000	23,9%
2001	12,73%
2002	3,51%

90. a) 192,02% e 117,20%
b) 154,61%
c) 3 439,78 barris/dia

91. 61 538 habitantes

92. 3,2211 bilhões de dólares

93. a) 33% b) 15,67% c) 875,86% d) entre 1900 e 1920 e) 195,27 milhões f) 186,78 milhões g) 201,72 milhões

94. 20%

95. 40%

96. R$ 26,00

97. a) 45,73% b) 11,86%

98. R$ 39,71

99. R$ 29,88

100. 5,10%

101. 48,02%

102. 11,47%

103. outubro

104. a) 5,96 b) após 4 meses

105. 14,29%

106. a) 21,43% b) 11,76% c) 35,71%

107. 8,8%

108. 1) F (o valor foi de 1,12 vezes)
2) F (diminuindo-se 7,41% o valor total das exportações de 1997 obteríamos o valor das exportações de 1996)
3) F (o valor foi de 20,96%)
4) V

109. a) 9,64% b) 4,73% c) 1970 e 1980 d) 72,03 anos e) 74,91 anos

110. 18%

111. a) 3,59% b) 0,39%

112. a) fevereiro: 2,5%
março: 1,63%
junho: 1,93%
julho: 2,27%
b) 253,75
c) 256,44

113. a) A: 0% B: 16,67% C: 5%
b) 7,05%

114. a) 3,34% b) 0,64%

115. 2,94%

116. a) 2,49% b) 1,96%

117. 19,56%

118. 18,22%

119. $(1,04)^{12} - 1 = 60,10\%$

120. deflação de 5,85%

121. 1,55%

122. 1,88%

123. 455%

124. 32,16%

125. 28,57%

126. 50%

127. 84,62%

Capítulo II

128. R$ 120,00 e R$ 4 120,00

129. R$ 16 500,00

130. R$ 27 250,00

131. 10,42%

132. R$ 100 200,00

133. 41,67%

134. 2,40%

135. 100%

136. a) R$ 927,00
b) Pagar à vista, pois aplicando o dinheiro, ainda faltaria R$ 1,00 para o pagamento.

137. a) 8,17% b) R$ 1,1589

138. 13,07%

139. 6,2%

140. 8,4%

141. a) 17,08% b) R$ 4 000,00

142. 13%

143. a) R$ 4 160,00 b) R$ 4 240,00 c) R$ 4 480,00

144. R$ 22 800,00

145. a) R$ 4 161,60 b) R$ 4 244,83 c) R$ 4 329,73

146. R$ 12 243,04

147. a) R$ 2 160,00 b) prejuízo de 28%

148. A opção de pagamento pode ser justificada pela tabela abaixo:

Data da compra	Saldo: 500
Um mês após a compra	Montante: 500 + (0,02)500 = 510 Saque: 185 Saldo: 510 − 185 = 325
Dois meses após a compra	Montante: 325 + (0,02)325 = 331,50 Saque: 185 Saldo: 331,50 − 185 = 146,50
Três meses após a compra	Montante: 146,50 + (0,02)146,50 = 149,43 Saque: 185 Saldo: 149,43 − 185 = −35,57

Paulo teve que desembolsar R$ 35,57 a mais para pagar a última prestação. Portanto, essa opção não foi boa.

149. verdadeira

150. a) R$ 1 000,00 b) R$ 960,00 c) R$ 2 142,00

151. R$ 29 600,00

152. R$ 5 172,41

153. R$ 10 000,00

154. R$ 4 242,42

155. a) R$ 80 000,00 b) R$ 160 000,00

156. a) R$ 11 111,11 b) a prazo

157. banco *A*: R$ 14 347,83
banco *B*: R$ 15 625,17

158. 3,57% a.m.

159. 4,76% a.m.

160. falsa

161. a) 6,25% a.m. b) 5 meses

162. 96% a.a.

163. 3,30% a.m.

164. 1,75% a.m.

165. 4% a.m.

166. 10 meses

167. 25 anos

168. a) R$ 8 768,00 b) R$ 9 152,00 c) R$ 10 048,00

169. R$ 200 166,67

170. R$ 200 266,67

171. 33,60% a.a.

172. 5,28% a.m.

173. 23,53% a.a.

174. 1 000% a.a.

175. a) R$ 1 132,08
b) É melhor que pagar à vista.

176. a) R$ 980,00 b) R$ 13 020,00 c) 3,76% a.m.

177. a) R$ 1 382,40 b) R$ 16 617,60 c) 3,47% a.m.

178. 2,5 meses

179. 38 dias, aproximadamente

180. R$ 20 000,00

181. 3,69% a.m.

182. A linha de crédito a juros simples de 4,2% a.m.

183. 4,04% a.m.

184. R$ 32 967,03

185. R$ 16 216,22

186. R$ 7 014,00

187. R$ 24 716,67

188. R$ 3 447,47

189. R$ 97 240,50

190. a) R$ 5 154,03 b) 1,79% a.m.

191. R$ 1 591,81

192. Sim, é preferível aplicar o dinheiro a juros compostos.

193. $1,0337 \cdot 10^{14}$ dólares

194. 10 vezes

195. a) R$ 13 789,89 b) R$ 190,39

196. A 2ª aplicação (de 6% a.a.) renderá mais. (Na 1ª ela receberia R$ 1 080,00 e na 2ª, R$ 1 123,60.)

197. R$ 22 038,52

198. 22,69%

199. R$ 5 201,98 (Lembre-se de que o resultado pode ser ligeiramente diferente dependendo do número de casas decimais utilizadas para arredondamento.)

200. R$ 9 421,01

201. R$ 81 984,55

202. 1,84%

203. 4% a.m.

204. 4,56% a.m.

205. 2,60% a.m.

206. 18,92% a.t.

207. 1,13% a.m.

208. a) R$ 4 229,49 b) R$ 4 075,08 c) R$ 4 308,87 d) R$ 4 190,34 e) R$ 4 389,74

209. a) 11,55 a.m. b) 271,29% a.a.

210. 17,88 meses (aproximadamente 536 dias)

211. 55,48 meses (aproximadamente 1 664 dias)

212. 28,41 trimestres

213. 36,39 meses

214. 73,8 meses

215. n = 6

216. 10,80 meses (aproximadamente 324 dias)

217. a) R$ 364 800,00

b) $12 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 1{,}08} \cong 171{,}3$ meses

218. 3,45 anos

219. n < 1 (Sugestão: faça os gráficos dos montantes a juros simples e a juros compostos.)

220. a) R$ 7 825,92 b) 4,35% a.b.

221. R$ 12 697,03

222. R$ 13 412,67

223. R$ 11 538,95

224. a) 4,55% b) 1,87%

225. −5,87%

226. a) R$ 16 512,88 b) R$ 16 632,29 c) R$ 16 753,26 d) R$ 16 875,82 e) R$ 17 000,00

227. R$ 11 568,70

228. a) a prazo b) à vista

229. Pagamento a prazo (O valor atual é R$ 17 060,04, portanto inferior ao valor para pagamento à vista.)

230. Pagamento em 3 prestações mensais de R$ 1 024,00 cada, com valor atual de R$ 3 011,57. Na outra alternativa o valor presente dá R$ 3 035,73, que é superior ao valor presente da 1ª alternativa)

231. a) R$ 239,40
b) R$ 84,00
c) À vista, pois o valor presente da alternativa a prazo é R$ 242,43.

232. R$ 500,00

233. a) R$ 583,22 b) R$ 574,87

234. R$ 353,53

235. R$ 5 677,63

236. R$ 6 726,83

237. R$ 2 825,14

238. a) R$ 88,80 b) R$ 63,79 c) R$ 51,44

239. R$ 1 323,03

240. R$ 1 025,77

241. R$ 86 951,46

242. R$ 85 827,02

243. R$ 250 938,43

244. R$ 34 925,46

245. a) R$ 5 100,00 b) $n = \dfrac{\log\left(\dfrac{R}{R - Pi}\right)}{\log(1 + i)}$

246. 139 meses. Se ele sacasse R$ 2 000,00 por mês, o prazo seria de 57 meses, aproximadamente.

247. a) R$ 20 522,65 b) R$ 21 333,49

248. R$ 588,75

249. R$ 524,64

250. R$ 3 904,46

251. a) R$ 3 143,17 b) R$ 64 401,59

252. a) R$ 606,00 b) 20 depósitos

253. R$ 1 190,55

254. a) R$ 232 654,97 b) R$ 1 842,95

Capítulo III

255. variáveis qualitativas: 1, 5, 6 e 8
variáveis quantitativas: 2, 3, 4 e 7

256. a) cinco
b) ensino fundamental completo, ensino médio completo e ensino superior completo

257. variáveis qualitativas: 1, 2, 4 e 6
variáveis quantitativas: 3, 5 e 7

258.

Sexo	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
Masculino	12	0,60	60
Feminino	8	0,40	40
Total	**20**	**1,00**	**100**

259.

Número de dias	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
1	3	0,15	15
2	4	0,20	20
3	6	0,30	30
4	3	0,15	15
5	2	0,10	10
6	1	0,05	5
7	1	0,05	5
Total	**20**	**1,00**	**100**

260.

Idade (em anos)	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem (%)
19 ⊢ 29	7	0,35	35
29 ⊢ 39	5	0,25	25
39 ⊢ 49	4	0,20	20
49 ⊢ 59	4	0,20	20
Total	**20**	**1,00**	**100**

261. a)

Nº de aparelhos	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
0	20	0,025	2,5
1	210	0,2625	26,25
2	480	0,6	60,0
3	60	0,075	7,5
4	30	0,0375	3,75

b) 178 500 lares

262.

Tempo (em minutos)	n_i	f_i	Porcentagem (%)
7 ⊢ 12	4	$01,\overline{3}$	$13,\overline{3}$
12 ⊢ 17	10	$0,\overline{3}$	$33,\overline{3}$
17 ⊢ 22	7	$0,2\overline{3}$	$23,\overline{3}$
22 ⊢ 27	4	$0,1\overline{3}$	$13,\overline{3}$
27 ⊢ 32	2	$0,0\overline{6}$	$6,\overline{6}$
32 ⊢ 37	3	0,1	10,0
Total	**30**	**1,00**	**100**

263. a = 0,6 b = 20 c = 0,25 d = 10 e = 0,125 f = 2 g = 0,025

264. a)

Altura (em metros)	n_i	f_i	Porcentagem (%)
1,65 ⊢ 1,70	2	0,08	8
1,70 ⊢ 1,75	7	0,28	28
1,75 ⊢ 1,80	9	0,36	36
1,80 ⊢ 1,85	6	0,24	24
1,85 ⊢ 1,90	1	0,04	4

b) No mínimo dez jovens.

265. a = 16 b = 0,10 c = 0,375 d = 56 e = 0,35 f = 8 g = 20 h = 0,125

266. 1) V; é aproximadamente 7,3% do total
2) V; até 1 salário mínimo a razão é 1,5 e para rendimentos superiores a 1 salário mínimo é menor que 1
3) V; 66% são mulheres
4) V; essa porcentagem é da ordem de 58%

267. a) 23 bilhões de reais
b) 121%

268.

descansar 30%
passear na cidade 20%
trabalhar 5%
viajar 45%

269. a) 330 b) 5

270. a) 30 b) 99°

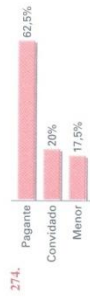
271. a)

H (88,2°)
B (136,8°)
E (135°)

b) 50 alunos

272. a) 1 200 c) 29,25%
b) 780 d) 1 716

273. a) 1) 23 — 58
2) 18,4 (18 446 000)
3) 12,4 (12 431 000) — 111,6° — 230,6
b) 1) V; o giro é de R$ 106 440 000 000,00
2) F; os gastos são de 28,384 bilhões de reais
3) V; os gastos estimados são de R$ 408,00

274.

275. a) F; a participação decresceu em 2002 e 2003
b) F; foram comercializados 741 600 veículos
c) V

276. a) 31,25% b) R$ 940,00

277. a) Inglaterra
b) França: U$ 10,44
Argentina: U$ 16,10
c) 417 minutos

278. a) 230 000 km^2
b) 32 857 142 campos de futebol
c) de julho de 1997 a julho de 2001
d) 4,7%, aproximadamente

279. a) V; cresceu 0,4 milhões por ano
b) V; foi de 6,06%
c) F; de 2000 a 2001: 3,03%, de 2001 a 2002: 2,94%
d) V; foi de 3,03%
e) V; foi de 13,375 milhões de sacas

280. a) 20 e 8 b) $\frac{3}{5}$

281. a) Sudeste (153°), Sul (114°), Nordeste (65°), Centro-Oeste (26°), Norte (2°)
b) 2 300
c) São Paulo: 56,8%; Santa Catarina: 42,7%

282. a) V
b) V
c) F; correspondem a 20% do total
d) F; é 133,3%
e) F; é necessário contratar no mínimo 13

283. a) V b) V c) F d) F

284. a) x = 1,21; y = 8,12

b)

285. R$ 14 793,00

286.

287. a) 45%
b) 38,3%
c) R$ 2 005,00

288. a)

b)

c)

289. a) 62 dias c) 103,65 litros
b) 48 dias

290. a) desemprego: crescente de 1995 a 1999 e de 2001 a 2003; decrescente de 1999 a 2000; constante no período de 2000 a 2001
rendimento: decrescente de 1997 a 2003; praticamente constante de 1995 a 1997
b) 29,6%
c) aproximadamente R$ 167,00

291. a) 1992
b) 85 000
c) de 1997 a 2002; de 1990 a 1993

292. 0) V
1) V
2) F; a cotação chegaria a U$ 38,80

293. a) V c) F e) V
b) F d) F

294. a) 2º, 3º e 5º meses
b) R$ 358 000,00
c)

lucro total: R$ 98 000,00

295. a) V
b) V

c) F; aumentou 460%
d) V; operações com cheques: −7,81%; operações com cartões: +8,85% (ambas giram em torno de 8%)

296. a) novos óbitos: crescente de 1982 a 1995 e decrescente de 1995 a 2002
novos doentes: crescente de 1982 a 1998 e decrescente de 1998 a 2002
b) 24 500
c) 1996
d) 1998

297. a) 21 d) $0,41\overline{6}$
b) 37,5 e) 0,5a + 0,3b + 0,2c
c) $8,58\overline{3}$ f) 47,375

298. R$ 332,00

299. a) 22 b) −2, −1, 0, 1, 2

300. −4 ou 5

301. a) a = 14
b) $20 \leq a < 26$
c) $a < -52$

302. a) 228 b) 17,96

303. 6 meses

304. 43

305. 42,5 e 127,5

306. a) 144 b) 32,4

307. a) *m* b) m = 35; n = 21

308. 5

309. 40

310. 6

311. 4

312. −14, −8, −2, 4, 10, 16, 22

313. 0,52

314. a) 5,2 b) 3,6

315. a) R$ 610,00
b) R$ 636,00
c) R$ 568,00

316. B: 21%; C: 9%

317. 2,89 anos

318. a) $\bar{x}' = \bar{x} + 2$
b) $\bar{x}' = 3 \cdot \bar{x}$
c) $\bar{x}' = \bar{x} - 5$
d) $\bar{x}' = -2 \cdot \bar{x} + 3$
e) $\bar{x}' = 0$

319. a) 2,34 gols b) 10

320. a) R$ 670,00 b) R$ 744,00

321. 0,45

322. a) R$ 647,00 b) R$ 651,00

323. do fabricante *A*: 30 copos; do fabricante *B*: 70 copos

324. nota 5: 48 alunos; nota 10: 12 alunos

325. a) 5 120 candidatos b) não; foi 2,3

326. 522

327. 5

328. a) R$ 19,70
b) 8 700 pessoas: R$ 20,00; 11 300 pessoas: R$ 50,00

329. 1,89 m

330. 32

331. a) 72,2 b) 3

332. a) *p* b) $p + \frac{1}{n}$

333. 38 anos

334. a) homens: 49,9%; mulheres: 50,1%
b) homens: 49,7%; mulheres: 50,3%

335. a) V
b) F; a média no período é 29,6 °C, aproximadamente
c) F; em Goiânia é 2,5 °C e em Aragarças é 2,8 °C
d) F; a diferença é máxima no mês de julho

336. 212

337. a) 20 b) 35

338. a) Mo = 8; Me = 8
b) Mo = 3; Me = 2
c) Mo = 40; Me = 40
d) Mo = 0,6 e 0,7; Me = 0,65

339. média: 2,245; mediana: 2,35; moda: 1,9

340. a) média: 6,3; mediana: 3,5; moda: 2 (a média foi influenciada por um valor discrepante, referente ao consumo na China)
b) consumo *per capita* na China: 23,3 kg; na Espanha: 50,1 kg

341. a) a mediana
b) $\bar{x} = 4,1$; Mo = 3; Me = 3
c) 3,36

342. média: 3,20; mediana: 3,00; moda: 3,00

343. a) 160 funcionários
b) 1 filho
c) 1 filho

344. a) 2
b) 1
c) 33

345. a) x = 70; y = 87 b) 63

346. a) 5 b) 10,5

347. 1) falso; a moda é 3
2) verdadeiro; a média dos dados é 3,63 peças defeituosas em cada lote de 100 unidades (3,63%)
3) verdadeiro; em ambos os casos a mediana é 3,5 peças defeituosas

348. a) 1 b) 28 pessoas

349. a) $\sigma \cong 1,414$
b) $\sigma \cong 0,894$
c) $\sigma \cong 1,633$
d) $\sigma \cong 0,142$
e) $\sigma \cong 4,45$

350. a) $\bar{x} \cong 1,44$; $\sigma \cong 1,19$
b) 4

351. 516 140 turistas, aproximadamente

352. a) $\bar{x} = 76,6$; $\sigma \cong 11,7$
b) diminui, pois os valores restantes formam um grupo mais homogêneo; $\sigma \cong 8,7$

353. x = 15 ou x = 3

356. a) 0,5
b) 0,157, aproximadamente

357. a) 76
b) 2,5 vezes por semana
c) Mo = 2; Me = 2
d) 1,24

358. a) $5 - \frac{9}{n}$ b) 8

359. a) 6 b) 7,5 c) 5 e 8

360. a) 0
b) 0,98%, aproximadamente

361. a) $\sigma \cong 195,9$
b) 1998 a 1993: $\sigma \cong 12,86$; 1996 a 2000: $\sigma \cong 88,6$
A queda é explicada pelo fato de os dados estarem agrupados em blocos mais homogêneos (especialmente no primeiro período).

362. a) companhia *B* $(\bar{x}_B = 91,8\%;\ \bar{x}_A = 91,2\%)$
b) companhia *A*: $(\sigma_A \cong 2,31\%;\ \sigma_B \cong 4,83\%)$

363. n = 5; $\sigma^2 = 6$

364. $\sigma_A^2 \cong 0,22 < \sigma_B^2 \cong 0,66$

365. a) aproximadamente igual a 1
b) o mesmo do item *a*

366. a) $(\sigma^2)' = 4 \cdot \sigma^2$
b) $(\sigma^2)' = \sigma^2$
c) $(\sigma^2)' = \frac{\sigma^2}{25}$
d) $(\sigma^2)' = 16 \cdot \sigma^2$
e) $(\sigma^2)' = \sigma^2$

367. a) R$ 322,00 b) R$ 125,00

368. R$ 30,00

369. zero ou 10

370. média: zero; desvio padrão: 1

371. a) $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_2}{n} = \bar{a}$

b) $\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + ... + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2}{n}$

372. a) 47, aproximadamente
b) 34, aproximadamente

373. 1) F; na USP foi 26% e na UF-RS, 36%
2) F; não é o que ocorre na UF-RS de 1998 a 1999
3) F;

	Crescimento percentual (%)	Crescimento absoluto
USP	53,4	945
UF-MG	101,0	1 003
UF-RJ	44,1	421
UF-RS	36,7	246

4) V; de 1996 a 1997 foi 31%, de 1997 a 1998 foi 9,4% e de 1998 a 1999 foi 0,6%
5) V; não é preciso fazer cálculos; a série numérica da USP é a que contém os maiores valores, o que implica maior valor para a mediana; o desvio padrão da USP é maior que o da UF-RJ pois a série da USP é mais heterogênea

375. a) 1,5
b) 2,25
c) 0,857
d) 1,2

376. a) 10 b) n = 2; m = 1

377. a) 2,21
b) Sul: desvio médio ≅ 1,7 (no Sudeste, desvio médio ≅ 2,8)

378. a) O desvio médio seria igual a zero.

379. a) $\bar{x} \cong 1,82$ m; classe modal = [1,82; 1,88[; Me = 1,82 m
b) $\sigma^2 \cong 0,005$ m²; $\sigma \cong 0,07$ m

380. a) 238,63
b) sim; a taxa média de colesterol é 240,2 mg/dL de sangue

381. a)

Percentuais	Número de Estados	Porcentagem aproximada (%)
59 ⊢ 69	7	26
69 ⊢ 79	9	33
79 ⊢ 89	7	26
89 ⊢ 99	4	15

b) $\bar{x} \cong 77\%$; $\sigma \cong 10,1\%$; não pertencem ao intervalo dez Estados

382. não; pois $\bar{x}_A = 40$ e $\bar{x}_B = 42$; $|\bar{x}_A - \bar{x}_B| = 2 < 5$

383. t = 9

384. a) 3 ⊢ 5: 16%; 5 ⊢ 7: 12%
b) 1,92 (reais)², aproximadamente

385. arrecadação mínima: R$ 24 612,00; arrecadação máxima: R$ 25 188,00

386. a) A 1ª classe de valores não tem um limitante inferior; a última classe de valores não tem um limitante superior; além disso, há um pequeno número de universitários cujas rendas são desconhecidas.

b) R$ 2 595,13 e R$ 3 106,43

387. a) x = 150

b) $\overline{x} \cong 116{,}1$ km/h; classe modal = [108,115[; Me = 115 km/h; $\sigma \simeq 9{,}1$ km/h

c) R$ 250,73

388. a) 25,7 anos b) 25,82 anos

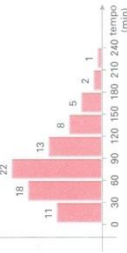
389. a)

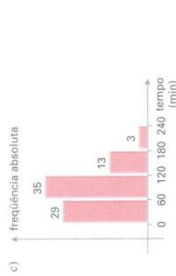
Turma *A*			
Categoria	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
péssimo 0 ⊢ 2	2	0,05	5
fraco 2 ⊢ 4	4	0,10	10
regular 4 ⊢ 6	11	0,275	27,5
bom 6 ⊢ 8	15	0,375	37,5
ótimo 8 ⊢ 10	8	0,20	20
Total	**40**	**1,00**	**100**

Turma *B*			
Categoria	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem (%)
péssimo 0 ⊢ 2	3	0,075	7,5
fraco 2 ⊢ 4	8	0,2	20
regular 4 ⊢ 6	6	0,15	15
bom 6 ⊢ 8	11	0,275	27,5
ótimo 8 ⊢ 10	12	0,3	30
Total	**40**	**1,0**	**100**

b) I) turma *A* $(\overline{x}_A = 6{,}15$ e $\overline{x}_B = 6{,}05)$

II) turma *A* $(\sigma_A \cong 2{,}14$ e $\sigma_B \cong 2{,}6)$

390. a)

b) $\overline{x} = 81{,}375$ min; Me = 75 min; classe modal = 60 a 90 minutos

c) freqüência absoluta: 29, 35, 13, 3; tempo (min): 0, 60, 120, 180, 240

$\overline{x}$ = 82,5 min; Me = 78,8 min; classe modal = 60 a 120 minutos

391. a)

Ano de 1991		
IDH	Freqüência absoluta	Porcentagem (%)
0,5 ⊢ 0,6	7	25,9
0,6 ⊢ 0,7	12	44,4
0,7 ⊢ 0,8	8	29,6

Ano de 2000		
IDH	Freqüência absoluta	Porcentagem (%)
0,6 ⊢ 0,7	7	25,9
0,7 ⊢ 0,8	15	55,6
0,8 ⊢ 0,9	5	18,5

b) 1991: 0,653; 2000: 0,743

c) 13,8%, aproximadamente

d) 0,066

392. a)

Taxa de ocupação	Número de dias	Porcentagem (%)
30 ⊢ 40	2	4
40 ⊢ 50	4	8
50 ⊢ 60	10	20
60 ⊢ 70	13	26
70 ⊢ 80	12	24
80 ⊢ 90	9	18
Total	**50**	**100**

b) 66,2%

c) 138 dias

394. a) 10 jogos b) 22 jogos

395. a) 36,5% b) 31,45% c) 1,92%

396. 61,875%

397. a) 4,125 b) 4,75 c) 8,63 d) 14,5

398. a) 30,5 minutos b) $[18,\overline{3}; 40]$ c) 35,7 minutos d) 46

399. x = 6,375

400. a) Não, pois a média obtida (13,45 min) não ultrapassou 15 minutos.

b) Sim, pois x(0,25) = 9,61 minutos.

401. *A*: de 50 g a 129 g; *B*: de 129 g a 214 g; *C*: de 214 g a 300 g

402. b = 40; c = 70. Para encontrarmos os valores *a*, *e*, *f* e *g*, supomos que todas as classes têm a mesma amplitude.

403. a) R$ 96,00 b) R$ 1 340,00 c) a = 226; b = 950

404. a) 14,4 b) 62,6 c) 30,9

405. 68 m²

Apêndice I

406. a) 2 b) 2 c) $3\sqrt[3]{2}$ d) $2\sqrt{5} \cong 4{,}47$ e) 2^8 f) 0 g) 2 h) 2 i) 6

407. $\frac{25}{4}$

408. 1 ou 9

409. $x^5\sqrt{x}$

410. 2 e 9

412. 0) F; se a = b, a média aritmética é igual a *a*

1) V

2) V

3) F; vale a desigualdade: a < MG < MA < b

4) V

Apêndice II

413. a) $\frac{20}{7}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 5 d) $\frac{1}{3}$ e) 2 f) 3

415. $\frac{10}{3}$

416. A = 5 e $G = 2\sqrt{6}$

417. sim

418. 1) F; $h = 5{,}8\overline{3} < \sqrt{35}$

2) V

3) V; $h = \left(\frac{a+c}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{a+c} = \frac{1}{\frac{a+c}{2}} = \frac{1}{b}$

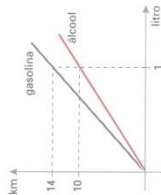
4) V

Testes de vestibulares

Matemática Comercial

1. (PUC-RS) A razão entre as arestas de dois cubos é $\frac{1}{3}$. A razão entre o volume do maior e do menor é:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) 9 e) 27

2. (UE-RJ) Analise o gráfico e a tabela:

Combustível	Preço por litro (em reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a:

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{7}{10}$

3. (Universidade da Bahia) Sessenta das 520 galinhas de um aviário *não* foram vacinadas; morreram 92 galinhas vacinadas. Para as galinhas vacinadas, a razão entre o número de mortas e de vivas é:

a) 1 : 4 b) 1 : 5 c) 4 : 1 d) 4 : 5 e) 5 : 4

4. (PUC-MG) Certa máquina de calcular faz 200 operações por minuto, enquanto um calculista consegue fazer 46 dessas operações no mesmo tempo. Pode-se afirmar que a calculadora é *m* vezes mais rápida que o calculista. O valor de *m* é tal que:

a) $1 < m \leq 4$
b) $4 < m \leq 7$
c) $7 < m \leq 10$
d) $10 < m \leq 13$

5. (FGV-SP) Em uma sala de aula, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{3}{4}$. Seja *N* o número total de pessoas (número de homens mais o de mulheres). Um possível valor para *N* é:

a) 46 b) 47 c) 48 d) 49 e) 50

6. (Unifor-CE) Um caminhão-tanque com capacidade para transportar *T* litros faz a distribuição de um combustível em três postos: *A*, *B* e *C*. Partindo com o tanque cheio, deixou $\frac{3}{20}$ do total em *A*. Se em *B* deixou $\frac{5}{17}$ do que restou e em *C* os últimos 10 500 litros, então *T* é tal que:

a) $16\,000 < T < 19\,000$
b) $\sqrt{T} < 130$
c) $T < 15\,000$
d) $14\,000 < T < 17\,000$
e) $T > 20\,000$

7. (UF-MG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado.
A área real dessa região é de:

a) 37,50 km² b) 56,25 km² c) 67,50 km² d) 22,50 km²

8. (UFR-RJ) Eduardo efetuou uma ligação telefônica para Goiânia, com tarifa normal e duração de 13,8 minutos, pagando pela ligação R$ 4,04. Se, com a tarifa reduzida, o minuto falado custa metade do preço da tarifa normal, podemos afirmar que o valor que mais se aproxima do valor pago por Eduardo por uma ligação para Goiânia com tarifa reduzida e duração de 13,1 minutos será de:

a) R$ 1,92
b) R$ 2,02
c) R$ 8,08
d) R$ 8,02
e) R$ 1,98

9. (Mackenzie-SP) No setor de seleção de pessoal de uma empresa, 85 pessoas foram contratadas, a partir de 120 candidatos. Se dentre os pretendentes havia 3 homens para cada mulher, e se 20 mulheres foram contratadas, então o número de homens não aceitos foi de:

a) 15 b) 20 c) 25 d) 10 e) 17

10. (Puccamp-SP) Um veículo vai da cidade *A* à cidade *B* e outro vai de *B* para *A* numa mesma estrada. Ambos partem num mesmo instante, mantêm velocidades constantes e se cruzam no ponto *C*, localizado a $\frac{3}{5}$ da distância de *A* para *B*. Nessas condições, se a velocidade do primeiro é 75 km/h, a velocidade do segundo é:

a) 62 km/h b) 50 km/h c) 48 km/h d) 45 km/h e) 42 km/h

11. (Puccamp-SP) Em agosto de 2000, Zuza gastou R$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo. No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou R$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, ele pôde comprar duas peças a menos. Em setembro, o preço de cada peça de tal artigo era:

a) R$ 24,00
b) R$ 25,00
c) R$ 28,00
d) R$ 30,00
e) R$ 32,00

12. (Mackenzie-SP) As *x* pessoas de um grupo deveriam contribuir com quantias iguais a fim de arrecadar R$ 15 000,00, entretanto 10 delas deixaram de fazê-lo, ocasionando, para as demais, um acréscimo de R$ 50,00 nas respectivas contribuições. Então *x* vale:

a) 60 b) 80 c) 95 d) 115 e) 120

13. (Unirio-RJ) Marta vai se casar e *N* amigas suas resolveram comprar-lhe um presente no valor de R$ 300,00, cada uma delas contribuindo com a quantia de *X* reais. Na hora da compra, entretanto, uma delas desistiu de participar e as outras tiveram, cada uma, um acréscimo de R$ 15,00 na quota inicialmente prevista. Assim, a afirmação correta é:

a) N = 4
b) X = R$ 60,00
c) X = R$ 45,00
d) X = R$ 50,00
e) N = 6

14. (UF-RN) Um prêmio em dinheiro estava para ser dividido, em partes iguais, entre 10 ganhadores. Inesperadamente, surgiram mais 2 ganhadores, devendo o prêmio ser dividido, portanto, em 12 partes iguais. Sabendo que a parcela cabível a cada um dos 10 primeiros ganhadores foi reduzida em R$ 700,00, marque a opção que corresponde ao valor do prêmio.

a) R$ 42 000,00
b) R$ 50 400,00
c) R$ 84 000,00
d) R$ 35 000,00

15. (PUC-RJ) Duas torneiras jogam água em um reservatório, uma na razão de 1 m^3 por hora e a outra na razão de 1 m^3 a cada 5 horas. Se o reservatório tem 12 m^3, em quantas horas ele estará cheio?

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

16. (FEI-SP) Utilizando-se simultaneamente dois guindastes *A* e *B*, um navio é carregado em 4 horas. Se apenas o guindaste *A* for utilizado, a operação demora 6 horas. Qual o tempo da operação se apenas o guindaste *B* for empregado?

a) 5 horas
b) 6 horas
c) 8 horas
d) 12 horas
e) 16 horas

17. (UE-RJ) "Há mais truques entre o peixe e a balança do que imagina o consumidor..."
Com balanças mais antigas (aquelas que utilizam duas bandejas), muitas vezes o peso é oco, ou seja, marca 500 g, mas pode pesar somente 300 g, por exemplo.
Adaptado de: *O Dia*, 28/8/1998.

Uma balança de dois pratos é usada para medir 2,5 kg de peixe, da seguinte forma: em um prato está o peixe, no outro um peso de 2 kg e mais um peso de 500 g. O peixe contém, em suas vísceras, um pedaço de chumbo de 200 g. O peso de 500 g, por ser oco, tem na verdade 300 g.
Se 1 kg desse peixe custa R$ 12,60, o consumidor pagará, na realidade, por kg, o preço de:

a) R$ 14,60
b) R$ 15,00
c) R$ 15,50
d) R$ 16,00

18. (UF-PE) Júnior possui uma fazenda onde recolhe 45 litros de leite de cabra por dia, que são utilizados na fabricação de queijo. Com cada 5 litros de leite, ele fabrica 1 kg de queijo. O queijo fabricado é então dividido em porções de 125 g que são empacotadas em dúzias. Cada pacote é vendido por R$ 6,00. Quanto Júnior arrecada por dia com a venda do queijo?

a) R$ 35,00
b) R$ 34,00
c) R$ 33,00
d) R$ 37,00
e) R$ 36,00

19. (U. F. Juiz de Fora-MG) Em um certo restaurante, as *pizzas* são feitas em formas de base circular. Os preços das *pizzas* do mesmo tipo variam proporcionalmente em relação à área da base da forma. Se uma *pizza* feita numa forma cuja base tem 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60, então uma outra *pizza*, do mesmo tipo, feita numa forma cuja base tem 30 cm de diâmetro, deve custar:

a) R$ 5,40
b) R$ 7,90
c) R$ 8,10
d) R$ 8,50
e) R$ 8,90

20. (Faap-SP) Dois sócios lucraram R$ 5 000,00. O primeiro entrou para a sociedade com o capital de R$ 18 000,00 e o segundo com R$ 23 000,00. Se os lucros de cada sócio são proporcionais aos capitais, a diferença entre os lucros foi de aproximadamente:

a) R$ 509,00
b) R$ 609,00
c) R$ 709,00
d) R$ 809,00
e) R$ 1 009,00

21. (PUC-PR) Uma construtora edificou 6 residências com as seguintes áreas construídas, em m^2: 110, 112, 120, 116, 120 e 102 e destinou uma área comum para lazer de 51 m^2, que deve ser dividida em partes proporcionais à área de cada residência.
Assim, a área corresponde à residência de 110 m^2 é, em m^2, igual a:

a) 9,00
b) 8,70
c) 8,40
d) 8,25
e) 7,65

22. (ESPM-SP) Quando um automóvel é freado, a distância que ele ainda percorre até parar é diretamente proporcional ao quadrado da sua velocidade. Se um automóvel a 40 km/h é freado e pára depois de percorrer mais 8 metros, se estivesse a 60 km/h, pararia após percorrer mais:

a) 12 metros
b) 14 metros
c) 16 metros
d) 18 metros
e) 20 metros

23. (Enem-MEC) No quadro a seguir estão as contas de luz e água de uma mesma residência. Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kWh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator. Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de eletricidade			
Fornecimento			Valor-R$
401 kWh × 0,13276000			53,23
Companhia de saneamento			
Tarifas de água/m^3			
Faixas de consumo	Tarifa	Consumo	Valor-R$
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	**11,45**

Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será de:

a) R$ 55,23
b) R$ 106,46
c) R$ 802,00
d) R$ 100,00
e) R$ 22,90

24. (Mackenzie-SP) Na tabela a seguir, de valores positivos, *F* é diretamente proporcional ao produto de *L* pelo quadrado de *H*.

F	L	H
2000	3	4
3000	2	x

Então *x* vale:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

25. (UF-CE) Suponha que o gasto com a manutenção de um terreno, em forma de quadrado, seja diretamente proporcional à medida do seu lado. Se uma pessoa trocar um terreno quadrado de 2 500 m^2 de área por outro, também quadrado, de 3 600 m^2 de área, o percentual de aumento no gasto com a manutenção será de:

a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

26. (UF-PI) O volume de um paralelepípedo reto retângulo é 162 m^3 e suas dimensões são proporcionais a 1, 2 e 3. A diagonal desse paralelepípedo mede:

a) $\sqrt{19}$ m
b) $3\sqrt{14}$ m
c) $\sqrt{31}$ m
d) $5\sqrt{35}$ m
e) $2\sqrt{37}$ m

27. (Faap-SP) Um trator, trabalhando 12 horas por dia, consome em 30 dias 1 800 litros de combustível. Sabendo-se que um litro de combustível custa R$ 0,80, qual é o custo do combustível gasto em 90 dias, trabalhando o trator 11 horas por dia?

a) R$ 2 450,00
b) R$ 4 950,00
c) R$ 1 440,00
d) R$ 3 960,00
e) R$ 5 020,00

28. (Faap-SP) Quatro impressoras iguais imprimem 600 cartazes em 2,5 h. O tempo necessário para se imprimir o triplo de cartazes, utilizando apenas duas dessas máquinas, será:

a) 2 h
b) 5 h
c) 7h30min
d) 12h30min
e) 15 h

29. (Fatec-SP) Um certo setor de uma empresa tem várias máquinas, todas com o mesmo custo operacional por hora. Se o custo de operação de 3 delas, em 2 dias, funcionando 6 horas por dia, é de R reais, então o custo de operação, em reais, de 2 delas, em 4 dias, funcionando 5 horas por dia, é igual a:

a) $\frac{8R}{9}$
b) $\frac{10R}{9}$
c) 2R
d) 2,5R
e) 5R

30. (Fatec-SP) Em uma indústria há duas máquinas que funcionam em velocidades constantes, mas distintas entre si. Funcionando ininterruptamente, juntas, produzem X peças iguais em 2 horas e 40 minutos. Uma delas, sozinha, produziria essas X peças em 4 horas de funcionamento ininterrupto. A outra produziria as X peças funcionando ininterruptamente em:

a) 8 horas e 15 minutos.
b) 8 horas.
c) 7 horas e meia.
d) 7 horas e 15 minutos.
e) 7 horas.

31. (Puccamp-SP) Certa empresa paga parcialmente um plano de saúde para seus funcionários. Ela contribui com uma quantia que é diretamente proporcional ao tempo de serviço do funcionário e inversamente proporcional a seu salário. Se, para um funcionário que trabalha há 10 anos e recebe R$ 1 200,00 de salário a empresa contribui com R$ 50,00, qual será a contribuição no caso de um funcionário cujo salário é de R$ 960,00 e tem 8 anos de serviço na empresa?

a) R$ 48,00
b) R$ 50,00
c) R$ 64,00
d) R$ 72,00
e) R$ 80,00

32. (Puccamp-SP) A tabela a seguir mostra a participação em uma empresa, de seus três sócios, em tempo (a partir do início das atividades da empresa) e em capital inicial investido.

Sócio	Tempo de participação	Capital inicial investido
Antônio	6 meses	R$ 5 000,00
Carlos	12 meses	R$ 2 500,00
Ernesto	9 meses	R$ 3 000,00

Ao completar um ano de funcionamento, o lucro de L reais foi dividido entre eles. A parte que coube a:

a) Antônio correspondeu a $\frac{13}{29}$ de L.
b) Carlos correspondeu a $\frac{11}{29}$ de L.
c) Ernesto correspondeu a $\frac{9}{29}$ de L.
d) Carlos correspondeu a $\frac{7}{29}$ de L.
e) Antônio correspondeu a $\frac{5}{29}$ de L.

33. (UF-RN) Um café é preparado e, logo depois, é servido em quatro xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar. A primeira xícara recebe 50 mL de café e 2 g de açúcar; a segunda, 70 mL de café e 3 g de açúcar; a terceira, 90 mL de café e 4 g de açúcar; a quarta, 120 mL de café e 5 g de açúcar.
O café se apresentará mais doce na:

a) primeira xícara.
b) segunda xícara.
c) terceira xícara.
d) quarta xícara.

34. (FGV-SP) Uma empresa comprou para seu escritório 10 mesas idênticas e 15 cadeiras também idênticas. O preço de cada mesa é o triplo do preço de cada cadeira. A despesa com cadeiras foi que porcentagem (aproximada) da despesa total?

a) 29,33%
b) 30,33%
c) 31,33%
d) 32,33%
e) 33,33%

35. (Vunesp-SP) Um advogado, contratado por Marcos, consegue receber 80% de uma causa avaliada em R$ 200 000,00 e cobra 15% da quantia recebida, a título de honorários. A quantia, em reais, que Marcos receberá, descontada a parte do advogado, será de:

a) 24 000
b) 30 000
c) 136 000
d) 160 000
e) 184 000

36. (Faap-SP) Uma pessoa colocou à venda uma residência avaliada em R$ 500 000,00. Um corretor conseguiu vendê-la por 85% desse valor, cobrando do proprietário 8% de comissão de corretagem. O proprietário recebeu pela venda:

a) R$ 391 000,00
b) R$ 375 000,00
c) R$ 425 000,00
d) R$ 382 500,00
e) R$ 467 500,00

37. (UF-MG) Um fabricante de papel higiênico reduziu o comprimento dos rolos de 40 m para 30 m. No entanto, o preço dos rolos de papel higiênico, para o consumidor, manteve-se constante.
Nesse caso, é correto afirmar que, para o consumidor, o preço do metro de papel higiênico teve um aumento:

a) inferior a 25%.
b) superior ou igual a 30%.
c) igual a 25%.
d) superior a 25% e inferior a 30%.

38. (Mackenzie-SP) Numa loja, um determinado produto de preço p é posto em promoção do tipo "leve 5 e pague 3". O desconto que a promoção oferece sobre o preço p do produto é de:

a) 40%
b) 35%
c) 30%
d) 25%
e) 20%

39. (Enem-MEC) O Brasil, em 1997, com cerca de 160×10^6 habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250 000 TEP (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias.
O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia.
Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é *x vezes maior* do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é:

a) 2,1
b) 3,3
c) 6,3
d) 10,5
e) 12,7

40. (UE-RJ) Uma máquina que, trabalhando sem interrupção, fazia 90 fotocópias por minuto foi substituída por outra 50% mais veloz. Suponha que a nova máquina tenha que fazer o mesmo número de cópias que a antiga, em uma hora de trabalho ininterrupto, fazia.
Para isso, a nova máquina vai gastar um tempo mínimo, em minutos, de:

a) 25
b) 30
c) 35
d) 40

41. (U. F. Viçosa-MG) Consultando um mapa rodoviário, um motorista decide por um itinerário 17% mais longo do que aquele que faz habitualmente. Como o tráfego de veículos nesse novo trajeto é menor, sua velocidade média aumentará em 30%. Diante dessas condições, o tempo de viagem diminuirá em:

a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

42. (PUC-RJ) Fiz em 50 minutos o percurso de casa até a escola. Quanto tempo gastaria se utilizasse uma velocidade 20% menor?
Indique a opção que apresenta a resposta correta.

a) 65 minutos.
b) 41 minutos e 40 segundos.
c) 60 minutos.
d) 62 minutos e 30 segundos.
e) 50 minutos e 20 segundos.

43. (Mackenzie-SP) Se a circunferência de um círculo tiver o seu comprimento aumentado em 100%, a área do círculo ficará aumentada em:

a) 300%   b) 400%   c) 250%   d) 100%   e) 200%

44. (Mackenzie-SP) Um prisma reto de base quadrada teve os lados da base e a altura diminuídos em 50%. O seu volume ficou diminuído de:

a) 87,5%   b) 50%   c) 85%   d) 60%   e) 75%

45. (Unifor-CE) Tico resolveu economizar guardando, a cada semana, uma parcela de sua mesada. Na primeira semana ele guardou 40 reais e, a partir de então, 10 reais por semana. Se ele não usou o dinheiro guardado, a quantia que ele acumulou em 20 semanas corresponde a que porcentagem da quantia que guardou na primeira semana?

a) 375%   b) 400%   c) 475%   d) 500%   e) 575%

46. (Fuvest-SP)

Produção e vendas, em setembro, de três montadoras de automóveis

Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da produção
A	3 000	80%
B	5 000	60%
C	2 000	x%

Sabendo que nesse mês as três montadoras venderam 7 000 dos 10 000 carros produzidos, o valor de x é:

a) 30   b) 50   c) 65   d) 80   e) 100

47. (U. F. Juiz de Fora-MG, adaptado) Durante a campanha para o primeiro turno da eleição para presidente, um instituto de pesquisas divulgou a tabela abaixo, que mostrava os totais de intenções de voto em quatro candidatos. Foi informado que a margem de erro dessa pesquisa era de 1,8% para mais ou para menos.

Candidatos	Total de intenções de voto (%)
Lula	41
Serra	19
Garotinho	13
Ciro	12

Com base nessa pesquisa, *não* podemos concluir que:

a) o total de intenções de voto no candidato Lula estava entre 39,2% e 42,8%.
b) a diferença entre os totais de intenções de voto nos candidatos Garotinho e Ciro era menor do que 3 pontos percentuais.
c) a diferença entre os totais de intenções de voto nos candidatos Serra e Ciro era maior do que 3 pontos percentuais.
d) os totais de intenções de voto nos candidatos Garotinho e Ciro podiam ser iguais.
e) o total de intenções de voto no candidato Serra era maior que no candidato Garotinho.

48. (PUC-MG) Em maio de cada ano, certa empresa reajusta os salários de seus funcionários pelo índice de aumento de preços ao consumidor, apurado no ano anterior. Em 2001, esse índice foi de 6,2%. Com base nesses dados, pode-se estimar que um funcionário que, em maio de 2001, recebia R$ 540,00 passou a receber, em maio de 2002:

a) R$ 573,48
b) R$ 575,20
c) R$ 577,28
d) R$ 580,34

49. (Cefet-MG) A soma do preço de duas mercadorias é de R$ 50,00. A mais cara terá um desconto de 10% e a mais barata sofrerá aumento de 15%, mantendo a soma dos preços no mesmo valor. A diferença entre os dois preços diminuirá em:

a) 25%   b) 30%   c) 40%   d) 50%   e) 60%

50. (PUC-MG) Em um município com 12 600 eleitores, uma pesquisa indicou que o candidato *A* deverá ter 40% dos votos das mulheres e 30% dos votos dos homens, enquanto o candidato *B* deverá ter 30% dos votos dos eleitores femininos e 40% dos votos dos eleitores masculinos. Sabendo-se que, do total desses eleitores, 6 600 são mulheres, pode-se afirmar que o número de votos que o candidato *B* deverá ter, de acordo com a pesquisa, é:

a) 4 380   b) 4 440   c) 4 520   d) 4 610

51. (PUC-PR) Durante determinado ano foram matriculados 100 novos alunos em um colégio. No mesmo ano, 15 alunos antigos trancaram matrícula. Sabendo-se que, no final do ano, o número de alunos matriculados, em relação ao ano anterior, havia aumentado em 10%, o número de alunos ao final do ano era de:

a) 850   b) 730   c) 950   d) 935   e) 750

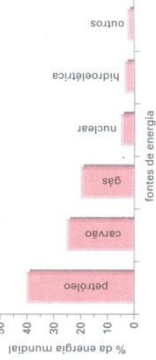
52. (UF-RS) Considere os dados da tabela abaixo referentes à População Economicamente Ativa (PEA) de uma determinada região.

Distribuição da PEA por anos de estudo, segundo sexo

	PEA masculina	PEA feminina
Até 4 anos de estudo	60%	50%
5 ou mais anos de estudo	40%	50%
Total	100%	100%

Se os homens são 60% da PEA dessa região, homens e mulheres com 5 anos ou mais de estudo representam:

a) 36% da PEA da região.
b) 40% da PEA da região.
c) 44% da PEA da região.
d) 45% da PEA da região.
e) 54% da PEA da região.

53. (Enem-MEC) Segundo um especialista em petróleo (*O Estado de S.Paulo*, 5/3/2000), o consumo total de energia mundial foi estimado em 8,3 bilhões de toneladas equivalentes de petróleo (TEP) para 2001. A porcentagem das diversas fontes da energia consumida no globo é representada no gráfico.

Segundo as informações apresentadas, para substituir a energia nuclear utilizada é necessário, por exemplo, aumentar a energia proveniente do gás natural em cerca de:

a) 10%   b) 18%   c) 25%   d) 33%   e) 50%

54. (U. F. Santa Maria-RS) Numa melancia de 10 kg, 95% dela é constituída de água. Após desidratar a fruta, de modo que se elimine 90% da água, pode-se afirmar que a massa restante da melancia será, em kg, igual a:

a) 1,45 b) 1,80 c) 5 d) 9 e) 9,5

55. (UF-RS) A quantidade de água que deve ser evaporada de 300 g de uma solução salina (água e sal) a 2% (sal) para se obter uma solução salina a 3% (sal) é:

a) 90 g b) 94 g c) 97 g d) 98 g e) 100 g

56. (Fuvest-SP) Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

a) 20% b) 22% c) 24% d) 26% e) 28%

57. (UF-PI) Numa mistura de ouro e prata de 8 kg, o percentual de ouro é de 25%. Mantendo a quantidade de prata, a quantidade de ouro que devemos acrescentar para que o percentual de ouro na nova mistura seja de 40% é:

a) 1 kg b) 2 kg c) 3 kg d) 4 kg e) 5 kg

58. (UF-PA) "As tartarugas de água doce ocupam o segundo lugar no *ranking* do comércio ilegal de animais silvestres. Ao lado de jacarés e cobras, perdem apenas para as aves exóticas como araras, periquitos e papagaios. No mundo todo, o tráfico de bichos movimenta 15 bilhões de reais. O Brasil é responsável por 10% desse total, sendo mais da metade referente a animais retirados clandestinamente da Floresta Amazônica."

(*Veja*, 25/8/1999.)

Abaixo, são dados alguns valores para representar a quantidade, em reais, que movimenta o comércio ilegal de animais retirados da Amazônia. Com base no texto acima, apenas um deles é possível. Qual é ele?

a) 7,5 bilhões de reais
b) 800 milhões de reais
c) 700 milhões de reais
d) 75 milhões de reais
e) 7,5 milhões de reais

59. (Covest-PE) Determinadas frutas frescas contêm 70% de água e, quando secas, apresentam 20% de água. Quantos quilogramas dessas frutas frescas são necessários para que se obtenham 30 kg de frutas secas?

a) 80 b) 60 c) 64 d) 70 e) 75

60. (Fuvest-SP) Segundo um artigo da revista *Veja*, durante o ano de 1998 os brasileiros consumiram 261 milhões de litros de vinhos nacionais e 22 milhões de litros de vinhos importados. O artigo informou ainda que a procedência dos vinhos importados consumidos é dada pela tabela abaixo:

Itália → 23%	Alemanha → 13%
Portugal → 20%	Argentina → 6%
Chile → 16%	Outros → 6%
França → 16%	

O valor aproximado do total de vinhos importados da Itália e de Portugal, em relação ao total de vinhos consumido pelos brasileiros, em 1998, foi de:

a) 2,3% b) 3,3% c) 4,3% d) 5,3% e) 6,3%

61. (Unaerp-SP) "O poliduto Paulínia-Brasília, com base em Ribeirão Preto, tem capacidade para transportar 20 mil m^3/dia de óleo diesel, gasolina, querosene de aviação e GLP. Atualmente o Poliduto opera com 30% de sua capacidade, sendo o maior volume de diesel, com 65% do total bombeado."

Com base nos dados do texto acima, pode-se concluir que o volume diário, em litros, de óleo diesel bombeado pelo Poliduto Paulínia-Brasília é de:

a) 13 000 000
b) 3 900 000
c) 1 300 000
d) 3 900
e) 1 300

62. (Faap-SP) As medalhas de prata dos Jogos Pan-Americanos foram feitas fundindo-se lingotes do tipo *A* com lingotes do tipo *B*, ambos feitos de uma liga de prata e zinco. Sabe-se que um lingote do tipo *A*, de 3,5 kg, contém 76% de prata; fundido com um lingote do tipo *B*, resulta um lingote de 10,5 kg contendo 84% de prata. Que porcentagem de prata contém um lingote do tipo *B*?

a) 61% b) 77% c) 88% d) 92% e) 54%

63. (Cesgranrio-RJ) Um terreno será dividido em três lotes diferentes. A área do lote 3 é 10% maior do que a do lote 2, enquanto esta é 20% maior que a do lote 1. A que percentual da área desse terreno corresponde, aproximadamente, o lote 1?

a) 28,4% b) 28,7% c) 29,8% d) 30,3% e) 31,2%

64. (Mackenzie-SP) Numa festa, a razão entre o número de moças e o de rapazes é $\frac{13}{12}$. A porcentagem de rapazes na festa é:

a) 44% b) 45% c) 40% d) 48% e) 46%

65. (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou pessoas pretendentes a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Dos entrevistados, foram aprovados:

a) 30% b) 32% c) 36% d) 40% e) 45%

66. (Mackenzie-SP) Num grupo de 200 pessoas, 80% são brasileiros. O número de brasileiros que deve abandonar o grupo, para que 60% das pessoas restantes sejam brasileiras, é:

a) 90 b) 95 c) 100 d) 105 e) 110

67. (UF-ES) Uma concessionária de veículos comercializa dois modelos de automóveis, um popular e um de luxo. Sabe-se que as vendas do modelo popular correspondem a 60% do total de veículos comercializados, mas contribuem com apenas 20% da receita. Qual é a razão entre o preço do modelo de luxo e o preço do modelo popular?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

68. (UE-RJ) A reciclagem de latas de alumínio permite uma considerável economia de energia elétrica: a produção de cada lata reciclada gasta apenas 5% da energia que seria necessária para produzir uma lata não reciclada. Considere que, de cada três latas produzidas, uma não é obtida por reciclagem, e que a produção de cada lata reciclada consome 1 unidade de energia.
De acordo com essa proporção, o número de unidades de energia necessário para a produção de 24 latas é igual a:

a) 24 b) 42 c) 150 d) 176

69. (Vunesp-SP) Para manter funcionando um chuveiro elétrico durante um banho de 15 minutos e um forno de microondas durante 5 minutos, as quantidades de água que precisam passar pelas turbinas de certa usina hidrelétrica são, respectivamente, 4 000 litros e 200 litros. Suponha que, para esses eletrodomésticos, a redução de consumo será proporcional à redução da quantidade de água que passa pelas turbinas. Com base nisso, se o banho for reduzido para 9 minutos e o tempo de utilização do microondas for reduzido em 20%, a quantidade total de água utilizada na usina para movimentar as turbinas, durante o banho mais o uso do microondas, será, após as reduções, de:

a) 2 400 b) 2 416 c) 2 560 d) 3 700 e) 3 760

70. (UFF-RJ) Na eleição para prefeito de um município concorreram os candidatos *X* e *Y*.
O resultado final revelou que 38% dos eleitores votaram em *X*, 42% em *Y*, 16% nulo e 4% em branco.
Se 25% dos eleitores que votaram nulo houvessem votado no candidato *X* e 50% dos que votaram em branco houvessem votado em *Y*, o resultado seria:

a) 47,5% para *X*, 44% para *Y*, 6,5% nulos e 2% em branco.
b) 9,5% para *X*, 63% para *Y*, 25,5% nulos e 2% em branco.
c) 46% para *X*, 43% para *Y*, 8% nulos e 3% em branco.
d) 42% para *X*, 44% para *Y*, 12% nulos e 2% em branco.
e) 6,2% para *X*, 18,8% para *Y*, 25% nulos e 50% em branco.

71. (UF-CE) José e João possuem uma empresa cujo capital é de R$ 150 000,00. José tem 40% de participação na sociedade e deseja aumentar a sua participação para 55%. Se João não deseja alterar o valor, em reais, de sua participação, o valor que José deve empregar na empresa é:

a) R$ 110 000,00
b) R$ 170 000,00
c) R$ 82 500,00
d) R$ 90 000,00
e) R$ 50 000,00

72. (UF-ES) O proprietário de um posto de venda de combustível detectou um percentual de 30% de álcool em um tanque contendo 6 000 litros de uma mistura de álcool e gasolina. Como a legislação determina um percentual de 24% de álcool na mistura, quantos litros de gasolina deverão ser adicionados a esse tanque para que a exigência seja cumprida?

a) 4 560 b) 2 250 c) 1 800 d) 1 500 e) 1 440

73. (Mackenzie-SP) Uma loja comunica a seus clientes que promoverá, no próximo mês, um desconto de 30% em todos os seus produtos. Na ocasião do desconto, para que um produto que hoje custa k mantenha este preço, ele deverá ser anunciado por:

a) $\frac{7k}{3}$ b) $\frac{10k}{3}$ c) $\frac{17k}{10}$ d) $\frac{17k}{3}$ e) $\frac{10k}{7}$

74. (PUC-MG) Do salário bruto de Paulo são descontados:
INSS 4% FGTS 8% IR 15%
Após esses descontos, Paulo recebe o salário líquido de R$ 2 190,00. O salário bruto de Paulo é:

a) R$ 2 500,00
b) R$ 3 000,00
c) R$ 3 500,00
d) R$ 4 000,00
e) R$ 4 500,00

75. (UE-PA) O material de construção comprado numa loja especializada no ramo da construção civil custou R$ 1 200,00. A despesa do transporte desse material é de 6% sobre o valor da compra e o pagamento à vista dá ao comprador um desconto de 3% sobre o gasto total. Nessas condições, o valor gasto na compra do material foi:

a) R$ 1 272,00
b) R$ 1 233,84
c) R$ 1 228,36
d) R$ 1 218,38
e) R$ 1 236,60

76. (Mackenzie-SP) Ao comprar um objeto, para pagamento em parcelas iguais, uma pessoa foi informada de que a parcela paga até a data do vencimento teria um desconto de 20% e aquela paga com atraso teria um acréscimo de 20%. Se a primeira parcela foi paga no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, um acréscimo de:

a) 40% b) 48% c) 50% d) 20% e) 25%

77. (Faap-SP) Edna recebe um salário mensal que é constituído de uma parte fixa igual a R$ 1 000,00 e mais uma parte variável correspondendo a 3% sobre o total de vendas que exceder a R$ 5 000,00. Calcula-se em 10% o percentual de descontos diversos que incidem sobre seu salário bruto total. Em dois meses consecutivos, Edna recebeu, líquido, respectivamente, R$ 1 035,00 e R$ 1 089,00. Com esses dados, pode-se afirmar que suas vendas no segundo mês foram superiores às do primeiro mês em:

a) 18% b) 20% c) 30% d) 33% e) 41%

78. (Fatec-SP) Desejo comprar uma televisão à vista, mas a quantia Q que possuo corresponde a 80% do preço P do aparelho. O vendedor ofereceu-me um abatimento de 5% no preço, mas, mesmo assim, faltam R$ 84,00 para realizar a compra. Os valores de P e Q são, respectivamente:

a) R$ 520,00 e R$ 410,00
b) R$ 530,00 e R$ 419,50
c) R$ 540,00 e R$ 429,00
d) R$ 550,00 e R$ 438,50
e) R$ 560,00 e R$ 448,00

79. (Fuvest-SP) Numa barraca de feira, uma pessoa comprou maçãs, bananas, laranjas e peras. Pelo preço normal da barraca, o valor pago pelas maçãs, bananas, laranjas e peras corresponderia a 25%, 10%, 15% e 50% do preço total, respectivamente. Em virtude de uma promoção, essa pessoa ganhou um desconto de 10% no preço das maçãs e de 20% no preço das peras. O desconto, assim obtido, no valor total de sua compra foi de:

a) 7,5% b) 10% c) 12,5% d) 15% e) 17,5%

80. (UF-PE) Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente, custando R$ 48,00, para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos recusaram-se a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R$ 0,40 para a compra do presente. Qual a porcentagem de alunos da turma que contribuiu para a compra do presente?

a) 85% b) 65% c) 60% d) 80% e) 75%

81. (Puccamp-SP) Através de um canal de compras, pode-se adquirir certo tipo de camisa a R$ 29,00 a unidade, com a seguinte promoção: na compra de uma segunda camisa desse tipo, esta sairia por R$ 10,00. Nessa promoção, a porcentagem de desconto no preço da segunda peça, em relação ao preço da primeira, era de aproximadamente:

a) 65,5% b) 63,5% c) 34,5% d) 29% e) 19%

82. (Unifor-CE) No mês de outubro, devido à crise atual, o dono de uma confecção reduziu os preços de setembro em 10%. Não obtendo o aumento de vendas desejado, em novembro os preços foram novamente reduzidos em 10%. Após essa segunda redução, quem compra agora um vestido por R$ 145,80 está economizando, em relação ao preço de setembro, a quantia de:

a) R$ 36,45
b) R$ 34,20
c) R$ 32,00
d) R$ 30,61
e) R$ 29,16

83. (Fatec-SP) Numa microempresa, consomem-se atualmente X litros de combustível por dia. Para a próxima semana, haverá um aumento de 5% no preço do combustível. Com o objetivo de manter a mesma despesa, será feita uma redução no consumo. O novo consumo diário de combustível deverá ser de, aproximadamente:

a) 94,2% X
b) 95% X
c) 95,13% X
d) 95,24% X
e) 95,5% X

84. (Enem-MEC) Em um colégio, 40% da arrecadação das mensalidades corresponde ao pagamento dos salários dos seus professores. A metade dos alunos desse colégio é de estudantes carentes, que pagam mensalidades reduzidas. O diretor propôs um aumento de 5% nas mensalidades de todos os alunos para cobrir os gastos gerados por reajuste de 5% na folha de pagamento dos professores.
A associação de pais e mestres concorda com o aumento nas mensalidades mas não com o índice proposto. Pode-se afirmar que:

a) o diretor fez um cálculo incorreto e o reajuste proposto nas mensalidades não é suficiente para cobrir os gastos adicionais.
b) o diretor fez os cálculos corretamente e o reajuste nas mensalidades que ele propõe cobrirá exatamente os gastos adicionais.
c) a associação está correta em não concordar com o índice proposto pelo diretor, pois a arrecadação adicional baseada nesse índice superaria em muito os gastos adicionais.
d) a associação, ao recusar o índice de reajuste proposto pelo diretor, não levou em conta o fato de alunos carentes pagarem mensalidades reduzidas.
e) o diretor deveria ter proposto um reajuste maior nas mensalidades, baseado no fato de que a metade dos alunos paga mensalidades reduzidas.

85. (U. F. Juiz de Fora-MG) Em janeiro de 1991, a revista *Superinteressante* trazia uma matéria sobre energia elétrica, sob o título "Rebeldias da energia domada", que começava com a seguinte frase: "50 milhões de quilowatts movem e iluminam o país, mas os blecautes e outras panes rondam a vasta rede de distribuição de energia". Nessa matéria, já destacava a preocupação de reduzir o consumo de energia e apresentava os seguintes dados: "... Embora representem 80% do número de consumidores, as residências gastam apenas 18% da eletricidade total. Já as indústrias são apenas 2% dos consumidores, mas absorvem 50% da energia. A iluminação pública é a terceira colocada nessa lista, com um gasto de 10%...".
Diante desses números apresentados pela revista *Superinteressante*, podemos afirmar que, dos *50 milhões de quilowatts* que movem e iluminam o país:

a) a iluminação pública gasta 10 milhões de quilowatts.
b) as residências gastam 18 milhões de quilowatts.
c) as indústrias e as residências gastam um total de 34 milhões de quilowatts.
d) a iluminação pública e as indústrias gastam um total de 35 milhões de quilowatts.
e) a iluminação pública e as residências gastam um total de 40 milhões de quilowatts.

86. (Puccamp-SP) Na loja Compre Mais, um modelo de aparelho de som tem o preço de R$ 520,00 e pode ser comprado de duas formas:
— à vista, com desconto correspondente a 15% do preço;
— a prazo, com entrada correspondente a 20% do preço e o saldo, acrescido de 30% de seu valor, pago em 5 parcelas iguais.
Carlos e Heitor compraram esse aparelho, o primeiro à vista e o outro a prazo. Quanto Heitor pagou a mais que Carlos?

a) R$ 202,80 c) R$ 157,50 e) R$ 98,80
b) R$ 178,00 d) R$ 124,80

87. (UCDB-MS) Uma creche gastava x litros de leite para alimentar suas crianças durante 10 dias. Após chegar à creche um segundo grupo de crianças, esses x litros de leite passaram a ser consumidos em 8 dias. Se o leite fosse usado para alimentar apenas o segundo grupo de crianças, ele seria consumido em:

a) 20 dias. c) 40 dias. e) 60 dias.
b) 30 dias. d) 50 dias.

88. (U. F. Santa Maria-RS) Uma indústria necessita de 120 L de um combustível composto por 70% de gasolina, 20% de álcool e 10% de óleo. Em seus depósitos, dispõe de três tipos de misturas: a primeira, M_1, com 40% de gasolina, 20% de álcool e 40% de óleo; a segunda, M_2, com 80% de gasolina e 20% de álcool; a terceira, M_3, com 80% de gasolina e 20% de óleo. Que quantidades de M_1, M_2 e M_3, nessa ordem, são necessárias para obter, em litros, o combustível desejado?

a) 30 – 10 – 80 c) 20 – 0 – 100 e) 30 – 90 – 0
b) 20 – 10 – 90 d) 20 – 20 – 80

89. (UF-MG) Em um grupo de pessoas, 32% têm idade entre 30 e 40 anos; 48% estão entre 41 e 50 anos; e os demais 20%, entre 51 e 60 anos.
Dos que têm de 30 a 40 anos, 30% praticam exercícios regularmente. Esse número sobe para 40% na faixa dos que estão entre 41 e 50 anos, mas só 22% daqueles que têm entre 51 e 60 anos praticam exercícios regularmente.
Considere, agora, apenas as pessoas desse grupo que têm entre 30 e 50 anos. Nessa faixa etária, as pessoas que fazem exercícios regularmente correspondem a:

a) 27,2% c) 34%
b) 33,2% d) 36%

90. (Mackenzie-SP) Um concurso, desenvolvido em três etapas sucessivas e eliminatórias, eliminou 30% dos k candidatos iniciais na 1ª etapa, 20% dos remanescentes na 2ª etapa e 25% dos que ainda permanecem na 3ª etapa. Assim, cumpridas as 3 etapas, a porcentagem de k que permaneceu é:

a) 25% c) 38% e) 42%
b) 35% d) 40%

91. (UF-MG) Certa região do país, cuja área é de 300 000 km^2, possui 80% de terras cultiváveis, 25% das quais são improdutivas. Essas terras improdutivas deverão ser usadas no assentamento de famílias de agricultores sem terra. Supondo que cada família receba 30 hectares (1 ha = 10 000 m^2) e que o custo do assentamento de cada uma delas seja de R$ 30 000,00, o custo total do assentamento naquela região, em bilhões de reais, será de:

a) 4,8 c) 6,0
b) 2,4 d) 0,8

92. (Vunesp-SP) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por x reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda desse produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%. d) lucro de 25%.
b) prejuízo de 5%. e) lucro de 30%.
c) lucro de 20%.

93. (Fuvest-SP) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

a) 40% b) 45% c) 50% d) 55% e) 60%

94. (PUC-SP) Em uma indústria é fabricado certo produto ao custo de R$ 9,00 a unidade. O proprietário anuncia a venda desse produto ao preço unitário de X reais, para que possa, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor de X é:

a) 24 b) 18 c) 16 d) 14 e) 12

95. (Faap-SP) O custo de fabricação de um produto é R$ 90,00 por unidade. Do preço de venda, o fabricante deve pagar 25% de impostos. Do restante, 80% correspondem ao custo de fabricação e 20%, ao lucro. O produto deve ser vendido ao preço de:

a) R$ 144,00 c) R$ 136,00 e) R$ 196,00
b) R$ 180,00 d) R$ 150,00

96. (Mackenzie-SP) Um objeto é vendido em uma loja por R$ 26,00. O dono da loja, mesmo pagando um imposto de 20% sobre o preço de venda, obtém um lucro de 30% sobre o preço de custo. O preço de custo desse objeto é:

a) R$ 18,00 c) R$ 14,80 e) R$ 14,00
b) R$ 16,00 d) R$ 16,80

97. (UF-ES) Antônio compra abacaxis de um fornecedor ao preço de R$ 1,00 o lote de 3 unidades. Ele os revende na feira em amarrados com 5 unidades. Se o preço de cada amarrado é R$ 2,00, quantos abacaxis deverá vender para ter um lucro de R$ 100,00?

a) 1 300 b) 1 400 c) 1 500 d) 1 600 e) 1 700

98. (Fuvest-SP) Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, o seu preço para o importador é R$ 19 500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro para o importador?

a) R$ 22 500,00 c) R$ 25 350,00 e) R$ 39 000,00
b) R$ 24 000,00 d) R$ 31 200,00

99. (Fatec-SP) Certo comerciante deve recolher um imposto de 20% sobre o preço de venda de cada artigo. Em cada venda, esse comerciante deseja descontar o imposto e ficar com um lucro de 20% sobre o preço de compra do artigo.
Nessas condições, o preço de venda deve conter um acréscimo sobre o preço de compra de:

a) 20% b) 40% c) 44% d) 50% e) 52,5%

100. (Fuvest-SP) O limite de consumo mensal de energia elétrica de uma residência, sem multa, foi fixado em 320 kWh. Pelas regras do racionamento, se esse limite for ultrapassado, o consumidor deverá pagar 50% a mais sobre o excesso. Além disso, em agosto, a tarifa sofreu um reajuste de 16%. Suponha que o valor pago pelo consumo de energia elétrica no mês de outubro tenha sido 20% maior do que aquele que teria sido pago sem as regras do racionamento e sem o aumento de tarifa em agosto. Pode-se, então, concluir que o consumo de energia elétrica, no mês de outubro, foi de aproximadamente:

a) 301 kWh b) 343 kWh c) 367 kWh d) 385 kWh e) 413 kWh

101. (Umesp-SP) Fernando resolveu rifar seu aparelho de som. Para tanto, numerou etiquetas — somente com números pares de 2 a 48. Cada participante sorteava uma das etiquetas e, conforme o número retirado, pagava o seu valor em reais (por exemplo: quem retirou a etiqueta com o número 14 pagou R$ 14,00) e no dia do sorteio concorria com o mesmo número que estava nessa etiqueta.
Sabendo-se que o valor do aparelho era R$ 480,00 e que Fernando vendeu todas as etiquetas, o lucro porcentual obtido por ele foi de:

a) 30% b) 20% c) 45% d) 50% e) 25%

102. (UF-MG) Observe a tabela a seguir:

Rendimento para base de cálculo do mês (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir (R$)
Até 900,00	—	Isento
Acima de 900,00 até 1 800,00	15	135,00
Acima de 1 800,00	25	315,00

Essa tabela é utilizada para calcular o imposto de renda a ser pago à Receita Federal por um trabalhador no mês em questão. Para se obter o rendimento para base de cálculo, deve-se subtrair de seu rendimento bruto todas as deduções a que ele tem direito. Ao rendimento para base de cálculo aplica-se a alíquota correspondente e, em seguida, subtrai-se a parcela a deduzir, também correspondente, de acordo com a tabela, obtendo-se assim o valor do imposto de renda a ser pago. Nesse mês, um trabalhador, cujo rendimento bruto foi de R$ 2 000,00, teve direito somente às seguintes deduções: R$ 90,00 por dependente e R$ 200,00 pagos à Previdência. Nessas condições, sabendo-se que o valor do imposto pago por esse trabalhador, nesse mês, foi R$ 108,00, o número de dependentes considerado foi:

a) 0 b) 1 c) 2 d) maior que 2

103. (UF-RS) A tabela abaixo apresenta a variação percentual das vendas industriais de aparelhos domésticos, comparando o período julho—agosto de 1995 com o período julho—agosto de 1994.

Vendas industriais de aparelhos domésticos
(Variação percentual)

Linha branca	jul-ago-set/1995 jul-ago-set/1994
Refrigeradores	15,06
Freezers verticais	−4,97
Congel./Conserv. horiz.	42,61
Lavadoras automáticas	−18,18
Fogões	−0,17
Condicionadores de ar	83,45

Supondo que naquele período de 1994 tenham sido vendidas 200 000 lavadoras automáticas, o número de unidades vendidas no mesmo período em 1995 foi, aproximadamente:

a) 36 360
b) 114 770
c) 163 640
d) 236 360
e) 285 220

104. (ESPM-SP) De uma reportagem do jornal *Folha de São Paulo*, de 2/11/2000, foram tirados os seguintes dados fornecidos pelo IBGE: a população do Brasil em 1996 era de 157 milhões de pessoas; o Censo 2000 já havia recenseado, até a data da publicação da reportagem, 158,6 milhões de pessoas, número esse que equivalia a 95,25% do total da população brasileira.
Levando em consideração esses dados, pode-se concluir que o crescimento populacional do Brasil de 1996 a 2000 foi de, aproximadamente:

a) 4%
b) 6%
c) 8%
d) 9%
e) 10%

105. (UF-SE) A Prefeitura de certa cidade realizou dois concursos para preenchimento de suas vagas. No primeiro, a razão entre o número de vagas e o número de candidatos era de 2 para 5. Apesar do número de vagas ter ficado constante, no segundo concurso aquela razão passou a ser de 1 para 4. É correto afirmar que o número de inscritos aumentou em:

a) 15% b) 25% c) 40% d) 50% e) 60%

106. (UF-MG) Um mestre-de-obras e cinco pedreiros foram contratados para fazer certo serviço, pelo qual receberiam a quantia de Q reais. Essa quantia seria repartida entre eles de modo que todos os pedreiros recebessem o mesmo valor e o mestre-de-obras ganhasse 60% a mais que cada um deles.
Na última hora, um dos pedreiros desistiu. Então, o mestre-de-obras e os quatro pedreiros restantes decidiram fazer sozinhos o serviço e combinaram uma nova divisão dos Q reais: os quatro pedreiros receberiam valores iguais, mas o mestre-de-obras ganharia, agora, 50% a mais que cada um deles.
Então, a quantia que cada um dos quatro pedreiros recebeu teve um aumento de:

a) 10% b) 20% c) 25% d) 30%

107. (Umesp-SP) Nos últimos meses, foi noticiado na imprensa que o rolo de papel higiênico teve o seu comprimento reduzido de 40 para 30 metros, sem alteração no preço. Diante do exposto, podemos concluir que o produto teve um aumento de:

a) 20% b) 25% c) 33% d) 52% e) 75%

108. (UF-MG) Uma empresa dispensou 20% de seus empregados e aumentou o salário dos restantes, fazendo com que o valor de sua folha de pagamentos diminuísse 10%.
O salário médio da empresa — valor da folha de pagamentos dividido pelo número de empregados — teve um aumento percentual de:

a) 15%
b) 12,5%
c) 17,5%
d) 10%

109. (Ibmec-SP) A renda *per capita* é definida como o quociente do produto interno bruto (PIB) pela população economicamente ativa. Se no próximo ano a população economicamente ativa aumentar 12,5%, de quanto deverá aumentar o PIB para que a renda *per capita* dobre no referido ano?

a) 12,5%
b) 225%
c) 125%
d) 300%
e) 100%

110. (Faap-SP) Uma certa quantidade de cereal, que custara R$ 12,00 por saca, foi vendida, sucessivamente, por quatro negociantes, os quais obtiveram lucro de 20%, 12%, 15% e 10%, respectivamente. Qual foi o último preço de venda (aproximadamente) por saca?

a) R$ 22,50
b) R$ 14,40
c) R$ 16,12
d) R$ 18,54
e) R$ 20,40

111. (PUC-SP) Uma cooperativa compra a produção de pequenos horticultores, revendendo-a para atacadistas com um lucro de 50% em média. Estes repassam o produto para os feirantes, com um lucro de 50% em média. Os feirantes vendem o produto para o consumidor e lucram também 50%, em média. O preço pago pelo consumidor tem um acréscimo médio, em relação ao preço dos horticultores, de:

a) 150,0%
b) 187,0%
c) 237,5%
d) 285,5%
e) 350,0%

112. (Unifesp-SP) Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de um determinado município registrou o seguinte quadro, quanto ao número de casos positivos:
— em fevereiro, relativamente a janeiro, houve um aumento de 10%;
— em março, relativamente a fevereiro, houve uma redução de 10%.
Em todo o período considerado, a variação foi de:

a) −1% b) −0,1% c) 0% d) 0,1% e) 1%

113. (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma loja aplicou um desconto no preço de um eletrodoméstico, reduzindo-o em 25%. Como as vendas não aumentaram, aplicou um novo desconto de 20% sobre o preço reduzido. Após esses dois descontos, o preço do eletrodoméstico ficou igual a R$ 270,00. Então, o preço inicial desse eletrodoméstico era igual a:

a) R$ 162,00
b) R$ 405,00
c) R$ 450,00
d) R$ 492,00
e) R$ 500,00

114. (PUC-SP) Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:

a) 25% b) 26% c) 44% d) 45% e) 50%

115. (Faap-SP) No mês de outubro de determinado ano, uma categoria profissional tem direito a um aumento salarial de 75%. Como a categoria já havia recebido uma antecipação de 25% em julho, a porcentagem de acréscimo adicional do salário para compensar a antecipação concedida é de:

a) 30% b) 40% c) 50% d) 60% e) 70%

116. (FEI-SP) Os planos de instalação de uma nova indústria estimam que seu lucro no primeiro ano de funcionamento será de 500 unidades monetárias e, depois, esse lucro crescerá a uma taxa de 20% ao ano. Qual o lucro acumulado estimado ao final de 3 anos de funcionamento?

a) 1 820
b) 1 800
c) 1 500
d) 1 700
e) 1 780

117. (PUC-MG) Após dois anos de uso, um carro custa R$ 17 672,00. Sabendo que sua desvalorização é de 6% ao ano, o preço do carro há dois anos era:

a) R$ 19 792,64
b) R$ 19 000,00
c) R$ 20 000,00
d) R$ 21 200,00
e) R$ 24 033,92

118. (Mackenzie-SP) Um produto de preço inicial x sofre dois descontos iguais e sucessivos de K%, de modo que no seu preço final se tenha um desconto de 19% sobre x. O valor de K é:

a) 8,25
b) 8,75
c) 9
d) 9,5
e) 10

119. (ESPM-SP) Se um automóvel sofre desvalorização de 20% ao ano, ele estará valendo a metade do seu valor atual em:

a) pouco mais de 3 anos.
b) exatamente 2 anos e meio.
c) pouco mais de 4 anos.
d) exatamente 5 anos.
e) menos de 2 anos.

120. (U. F. Juiz de Fora-MG) As despesas mensais de uma pessoa dividem-se em gastos fixos e gastos variáveis. Seus gastos fixos são de R$ 180,00 e, nos próximos meses, seus gastos variáveis, que hoje são de R$ 100,00, aumentarão 2% a cada mês, em relação ao mês anterior. A expressão que fornece a despesa dessa pessoa daqui a t meses, em reais, é:

a) $180 + 100 \cdot (1{,}02)^t$
b) $(180 + 100) \cdot (1{,}02)^t$
c) $180 + 200t$
d) $180 + 102t$
e) $180 + 100 \cdot (0{,}02)^t$

121. (UF-PE) Uma herança será dividida entre dois herdeiros em partes inversamente proporcionais às fortunas acumuladas por cada um deles até o momento da partilha. Inicialmente, as fortunas são de 10 milhões e 15 milhões e crescem a uma taxa de 10% (cumulativos) ao ano. Se a partilha for consumada em 10 anos, que fração da herança caberá ao herdeiro que possuía inicialmente 15 milhões?

a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{7}{10}$

122. (PUC-SP) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6 000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?
(Dados: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

a) 1998 b) 1999 c) 2000 d) 2001 e) 2002

123. (UF-PE) O custo da cesta básica aumentou 1,03% em determinada semana. O aumento foi atribuído exclusivamente à variação do preço dos alimentos que subiram 1,41%. Qual o percentual de participação dos alimentos no cálculo da cesta básica (indique o valor mais próximo)?

a) 73% b) 74% c) 75% d) 76% e) 77%

Matemática Financeira

124. (UFV-MG) Um investidor tinha R$ 100 000,00 aplicados, parte em ouro e o restante em Certificados de Depósitos Bancários (CDBs). O ouro teve uma alta de 8% ao mês; os CDBs, de 10% ao mês. Se o rendimento no mês foi R$ 8 500,00, então a quantia, em reais, que ele investiu em ouro foi de:

a) 55 000
b) 75 000
c) 45 000
d) 65 000
e) 85 000

125. (Unifesp-SP, adaptado) Uma empresa brasileira tem 30% de sua dívida em reais, corrigida pela variação do dólar e os restantes 70%, corrigida pelo euro. Admitindo-se uma valorização de 10% do dólar e uma desvalorização de 2% do euro, ambas em relação ao real, pode-se afirmar que o total da dívida dessa empresa, em reais:

a) aume.nta 8%.
b) aumenta 4,4%.
c) aumenta 1,6%.
d) diminui 1,4%.
e) diminui 7,6%.

126. (FGV-SP) Um vidro de perfume é vendido, à vista, por R$ 48,00 ou, a prazo, em dois pagamentos de R$ 25,00 cada um, o primeiro no ato da compra e o outro um mês depois. A taxa mensal de juros do financiamento é aproximadamente igual a:

a) 6,7% b) 7,7% c) 8,7% d) 9,7% e) 10,7%

127. (PUC-MG) Uma pessoa toma emprestados R$ 9 000,00 e deverá pagar, ao final de oito meses, R$ 13 680,00 para liquidar esse empréstimo. A taxa total de juros cobrada nessa operação é de:

a) 46%
b) 52%
c) 61%
d) 67%

128. (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma loja de eletrodomésticos anuncia a seguinte promoção:
"Televisor 29", à vista, por apenas R$ 702,00, ou a prazo, em duas prestações mensais iguais de R$ 390,00, sendo a primeira paga no ato da compra".
Nessas condições, a taxa mensal de juros embutida na venda a prazo é igual a:

a) 10% b) 15% c) 20% d) 25% e) 30%

129. (ESPM-SP) Numa loja um objeto custa R$ 100,00 à vista. Uma pessoa compra esse objeto em duas parcelas iguais de R$ 60,00, pagando a primeira parcela no ato da compra e a segunda parcela trinta dias depois. Os juros cobrados por essa loja foram a uma taxa mensal de:

a) 50% b) 40% c) 30% d) 20% e) 10%

130. (FGV-SP) Fábio recebeu um empréstimo bancário de R$ 10 000,00, para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas, respectivamente, no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da 1ª parcela foi R$ 4 000,00, podemos concluir que o valor da 2ª foi:

a) R$ 8 800,00
b) R$ 9 000,00
c) R$ 9 200,00
d) R$ 9 400,00
e) R$ 9 600,00

131. (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1 000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1 000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é, aproximadamente, igual a:

a) 8,7%
b) 7,7%
c) 6,7%
d) 5,7%
e) 4,7%

132. (FGV-SP) Um capital aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% ao mês, triplica em:

a) 75 meses
b) 80 meses
c) 85 meses
d) 90 meses
e) 95 meses

133. (FVG-SP) Um fabricante vende determinado produto pelo preço *p*, para pagamento *n* meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto igual a 5% de *p*. A taxa mensal de juros simples do financiamento é:

a) $\frac{100}{19n}\%$ b) $\frac{100}{20n}\%$ c) $\frac{100}{21n}\%$ d) $\frac{100}{22n}\%$ e) $\frac{100}{23n}\%$

134. (UF-CE) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:

a) 0,2% b) 0,4% c) 2% d) 4% e) 6%

135. (U. F. Juiz de Fora-MG) O preço à vista de uma mercadoria é R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% de entrada no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo é de:

a) 94% b) 96% c) 98% d) 100%

136. (UF-PI) O capital que, investido a juros simples de 3% ao mês, gera, depois de 6 meses, um montante de R$ 141 600,00 é:

a) R$ 110 000,00 b) R$ 115 000,00 c) R$ 118 000,00 d) R$ 120 000,00 e) R$ 122 000,00

137. (UF-SE) Cláudia aplicou a quantia de R$ 100,00 a juros simples, à taxa de 1,8% ao mês. Ao completar 5 meses, retirou o montante e aplicou-o em outra instituição, com uma taxa mensal maior. Ao completar 4 meses da nova aplicação, seu novo montante era de R$ 119,90. Essa nova taxa mensal foi de:

a) 2,5% b) 2,4% c) 2,3% d) 2,2% e) 2,1%

138. (UF-PA) André devia, em seu cartão de crédito, R$ 1 000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R$ 1 440,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

a) 7,2% b) 14,4% c) 20% d) 22% e) 44%

139. (UF-RS) Uma loja avisa que, sobre o valor original de uma prestação que não for paga no dia do vencimento, incidirá multa de 10% mais 1% a cada dia de atraso.
Uma pessoa que deveria pagar *y* reais de prestação e o fez com *x* dias de atraso, pagou a mais:

a) $(0{,}1y + x)$ reais
b) $(x + 10)$ reais
c) $(10y + x)$ reais
d) $(0{,}1y + 0{,}01\,x)$ reais
e) $(0{,}1y + 0{,}01xy)$ reais

140. (Esccai-MG) Em quantos meses uma letra de R$ 85 000,00, descontada à taxa de 42% a.a., produz um líquido de R$ 61 200,00?

a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

141. (Fund. Visconde de Cairu-BA) Uma duplicata de valor nominal igual a R$ 15 000,00 foi descontada em um banco 3 meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto comercial simples de 6% a.m. O valor, em reais, a ser resgatado pelo cliente é:

a) 11 500 b) 11 800 c) 12 000 d) 12 100 e) 12 300

142. (PUC-RS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital *C*, ao final de cada ano (*t*) em que essas condições permanecerem, é:

a) $C = Q_0\,(1{,}1)^t$
b) $C = C\,(1{,}1)^t$
c) $C = Q_0\,(0{,}1)^t$
d) $C = C\,(0{,}1)^t$
e) $C = Q_0\,(10)^t$

143. (PUC-RJ) Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R$ 1 500,00 aplicados cumulativamente nessa carteira valem aproximadamente:

a) R$ 1 550,00 b) R$ 1 590,00 c) R$ 1 690,00 d) R$ 1 750,00 e) R$ 1 900,00

144. (ESPM-SP) Certo capital foi aplicado a juros compostos durante 2 anos, à taxa de 20% ao ano. Se esse capital tivesse sido aplicado a juros simples, para obter o mesmo rendimento, a taxa mensal deveria ser de aproximadamente:

a) 2% b) 1,98% c) 1,94% d) 1,87% e) 1,83%

145. (U. E. Londrina-PR) Uma quantia de dinheiro *Q*, aplicada a juros compostos à taxa de i% ao mês, cresce mês a mês em progressão geométrica, sendo $a_1 = Q$ no início do primeiro mês, $a_2 = \frac{Q(100 + i)}{100}$ no início do segundo mês e assim por diante.
Nessas condições, aplicando-se R$ 1 000,00 a juros compostos, à taxa de 5% ao mês, tem-se no início do terceiro mês o total de:

a) R$ 2 250,00 b) R$ 1 150,25 c) R$ 1 105,00 d) R$ 1 102,50 e) R$ 1 100,00

146. (PUC-RJ) Um banco pratica sobre o seu serviço de cheque especial a taxa de juros de 11% ao mês. Para cada 100 reais de cheque especial, o banco cobra 111 no primeiro mês, 123,21 no segundo, e assim por diante. Sobre um montante de 100 reais, ao final de um ano, o banco irá cobrar aproximadamente:

a) 150 reais. b) 200 reais. c) 250 reais. d) 300 reais. e) 350 reais.

147. (PUC-SP) Um capital *C*, aplicado a juros compostos a uma taxa unitária *i* por período, produz, ao final de *n* períodos, o montante *M*, dado por $M = C \cdot (1 + i)^n$. Nessas condições, utilizando-se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, o capital de R$ 2 000,00, aplicado a juros compostos, à taxa de 20% ao ano, produzirá o montante de R$ 5 000,00, ao final de um período de:

a) 4 anos. b) 4 anos e 2 meses. c) 4 anos e 8 meses. d) 5 anos. e) 5 anos e 6 meses.

148. (UCDB-MS) O montante de juros compostos pode ser determinado pela fórmula

$M = c(1 + i)^n$, em que

M: montante;
c: capital inicial;
i: taxa percentual;
n: número de períodos.

Considere que o valor de R$ 37 200,00 rendeu num certo período o montante de R$ 75 000,00 a juros compostos de 6% a.a. capitalizados anualmente. Então o período de aplicação daquele capital é aproximadamente igual a:

a) 13 anos b) 12 anos c) 11 anos d) 14 anos e) 10 anos

Dados: $\log 1{,}06 = 0{,}02531$
$\log 2{,}0161 = 0{,}30451$

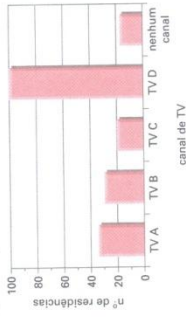
149. (UF-MG) Um consumidor adquiriu determinado produto em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais iguais de R$ 462,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que a última prestação fosse recalculada, para a retirada dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que foi atendido.
Depois de recalculado, o valor da última prestação passou a ser de:

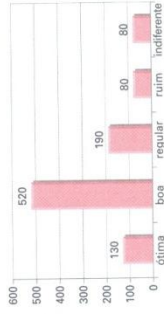
a) R$ 438,90 b) R$ 441,10 c) R$ 440,00 d) R$ 444,00

150. (PUC-SP) Um equipamento de som está sendo vendido em uma loja por R$ 1 020,00 para pagamento à vista. Um comprador pode pedir um financiamento pelo plano (1 + 1) pagamentos iguais, isto é, o primeiro pagamento deve ser feito no ato da compra e o segundo, 1 mês após aquela data. Se a taxa de juros praticada pela empresa que irá financiar a compra for de 4% ao mês, o valor de cada uma das prestações será de:

a) R$ 535,50
b) R$ 522,75
c) R$ 520,00
d) R$ 529,12
e) R$ 515,00

Estatística

151. (Enem-MEC) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21 h, durante uma determinada noite.
Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras abaixo.
A porcentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TV B é *aproximadamente* igual a:

a) 15% b) 20% c) 22% d) 27% e) 30%

152. (UF-RN) Numa pesquisa de opinião, feita para verificar o nível de aprovação de um governante, foram entrevistadas 1 000 pessoas, que responderam sobre a administração da cidade, escolhendo uma — e apenas uma — dentre as possíveis respostas: ótima, boa, regular, ruim e indiferente. O gráfico abaixo mostra o resultado da pesquisa.

De acordo com o gráfico, pode-se afirmar que o percentual de pessoas que consideram a administração ótima, boa ou regular é de:

a) 28% b) 65% c) 71% d) 84%

153. (UF-GO) Uma pesquisa mostrou que a uma semana das inscrições para os principais vestibulares, muitos candidatos ainda estavam indecisos em relação ao curso pretendido, como mostra a tabela abaixo.

Forma de decisão sobre o curso	
Respostas	**%**
Já decidiu	86,8
Pesquisando melhor sobre cursos	4,9
Não sabe	4,0
Decidirá na hora da inscrição	1,3
Teste vocacional (aptidão)	1,3
Pesquisando mercado de trabalho	0,9
Decidirá em conjunto com os pais	0,4
Guia do vestibulando	0,4

Fonte: *O Popular*. Goiânia, 15/9/2003. p. 4. Adaptado.

De acordo com os dados, o número de candidatos que decidirão pelo curso por meio de teste vocacional representa, entre os indecisos:

a) 1,3%
b) 9,85%
c) 10,15%
d) 11,9%
e) 13,2%

154. (Puccamp-SP) Dentre os resíduos industriais, destaca-se a emissão de gás carbônico, que causa o efeito estufa. O gráfico mostra como se distribuía a produção desse poluente em 1996.

ex-URSS e Europa Oriental
países desenvolvidos
países em desenvolvimento

Se a produção dos países desenvolvidos era de 3,2 bilhões de toneladas, a produção dos países em desenvolvimento, em bilhões de toneladas, deve ser estimada em cerca de:

a) 2,7 b) 2,1 c) 1,8 d) 1,5 e) 1,2

155. (Uneb-BA) O gráfico a seguir representa o resultado de uma pesquisa feita em um município, no mês de junho de 2001, a fim de analisar a redução do consumo de energia em residências, tendo em vista a meta fixada pelo governo, e com base na seguinte pergunta: "Qual a redução conseguida em relação à meta?"

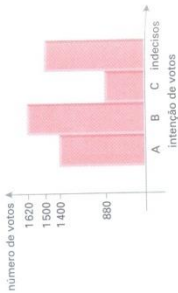
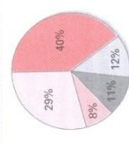
42 menor
5 não sabem*
20 igual
33 maior

* não responderam

A partir dessa informação e sabendo que o percentual para cada resposta é proporcional à área do setor que o representa, o ângulo do setor correspondente à resposta "menor" é igual a:

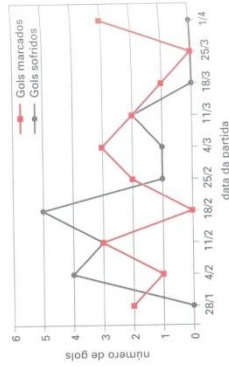
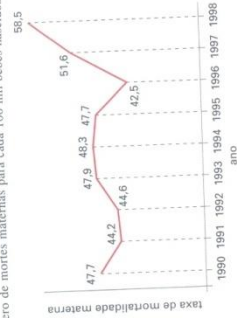
a) 108,3° b) 118,8° c) 142° d) 151,2° e) 160°

156. (U. F. Lavras-MG) Uma pesquisa eleitoral estudou a intenção de votos nos candidatos *A*, *B* e *C*, obtendo os resultados apresentados no gráfico.
A opção *incorreta* é:

a) O candidato *B* pode se considerar eleito.
b) O número de pessoas consultadas foi de 5 400.
c) O candidato *B* possui 30% das intenções de voto.
d) Se o candidato *C* obtiver 70% dos votos dos indecisos e o restante dos indecisos optarem pelo candidato *A*, o candidato *C* assume a liderança.
e) O candidato *A* ainda tem chance de vencer as eleições.

157. (UF-PE) Os gráficos a seguir ilustram a distribuição percentual do consumo de energia elétrica no Brasil dos diversos setores e do setor industrial.

Assinale a alternativa incorreta sobre o consumo de energia elétrica no Brasil.

a) O setor de metais consome mais que o comercial.
b) O setor público consome mais que o de alimentos.
c) O setor residencial consome mais que, juntos, o químico e o de metais.
d) O setor de papel consome 4,1% do total de energia.
e) O setor químico e o de alimentos consomem juntos menos que o residencial.

158. (Enem-MEC) No gráfico estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.
Considerando que, nesse campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a:

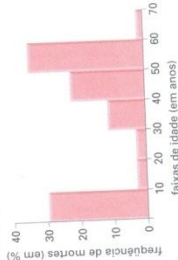
a) 15
b) 17
c) 18
d) 20
e) 24

159. (Unifor-CE) O gráfico abaixo apresenta a taxa de mortalidade materna no Brasil nos anos indicados. Essa taxa representa o número de mortes maternas para cada 100 mil bebês nascidos vivos.

Fonte: Ministério da Saúde.

Segundo a Organização Mundial de Saúde, a classificação dessa taxa é a seguinte:

Classificação	Taxa
Ideal	até 10
Baixa	mais de 10 a 20
Média	mais de 20 a 49
Alta	mais de 50 a 149
Muito alta	mais de 150

Nessas condições, é verdade que, no período considerado:

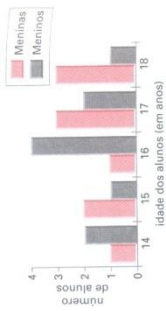
a) nos anos ímpares, a menor taxa ocorreu em 1991.
b) nos anos pares, a menor taxa ocorreu em 1992.
c) em oito desses anos, a classificação da taxa de mortalidade materna brasileira foi média.
d) em todos os anos, a classificação da taxa de mortalidade materna brasileira foi baixa.
e) em três desses anos, a classificação da taxa de mortalidade materna brasileira foi alta.

160. (Unifor-CE) Um instrumento para analisar as condições de vida de um país são os gráficos de mortalidade. O gráfico abaixo mostra a freqüência relativa de mortes, no ano de 1998, distribuída por faixa etária e reflete a situação de um país bastante pobre.

De acordo com o gráfico, é verdade que:

a) cerca de 30% das mortes atingiu crianças com até 10 anos de idade.
b) o número de mortes aumenta com o aumento da idade.
c) mais de 50% da população morre após os 50 anos de idade.
d) dentre as pessoas com mais de 60 anos, poucas morrem e a maioria sobrevive.
e) a maior quantidade de mortes referiu-se a pessoas com idade acima dos 70 anos.

161. (U. F. São Carlos-SP) Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico ao lado.

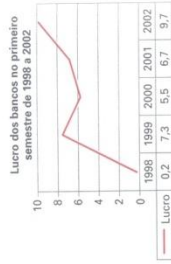
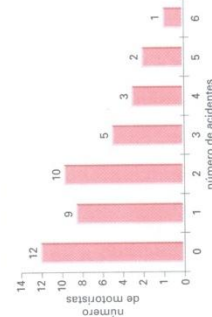
Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

a) o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idade.
b) o número total de alunos é 19.
c) a média de idade das meninas é 15 anos.
d) o número de meninos é igual ao número de meninas.
e) o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idade.

162. (UF-PE) O gráfico ao lado ilustra o lucro dos bancos brasileiros nos períodos correspondentes ao primeiro semestre dos anos de 1998 a 2002. As quantias estão em bilhões de reais.

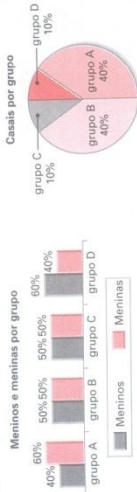
Lucro dos bancos no primeiro semestre de 1998 a 2002

	1998	1999	2000	2001	2002
Lucro	0,2	7,3	5,5	6,7	9,7

Admitindo esses dados, assinale a alternativa *incorreta*, referente ao lucro dos bancos durante os períodos mencionados.

a) A média (aritmética) dos lucros dos bancos foi superior a cinco bilhões de reais.
b) A média (aritmética) dos lucros dos bancos foi inferior a seis bilhões de reais.
c) O ano de maior crescimento percentual dos lucros, em relação ao ano anterior, foi 1999.
d) O decrescimento percentual em 2000 foi inferior ao crescimento percentual em 2001 (crescimento e decrescimento em relação ao ano anterior).
e) Em relação a 2000, em 2002 o lucro cresceu mais de 75%.

163. (Vunesp-SP) O gráfico indica o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 42 motoristas de táxi em uma determinada cidade, no período de um ano.

Com base nos dados apresentados no gráfico, e considerando que quaisquer dos motoristas não estão envolvidos num mesmo acidente, pode-se afirmar que:

a) cinco motoristas sofreram pelo menos quatro acidentes.
b) 30% dos motoristas sofreram exatamente dois acidentes.
c) a média de acidentes por motorista foi igual a três.
d) o número total de acidentes ocorridos foi igual a 72.
e) trinta motoristas sofreram no máximo dois acidentes.

164. (UF-MG) Fez-se uma pesquisa com certo número de casais de uma comunidade. Esses casais foram divididos em quatro grupos, de acordo com a quantidade de filhos de cada um. Os resultados dessa pesquisa estão representados nestes gráficos:

Grupo *A*: Casais com somente um filho
Grupo *B*: Casais com somente dois filhos
Grupo *C*: Casais com somente três filhos
Grupo *D*: Casais com quatro ou mais filhos

Com base nas informações contidas nesses gráficos, é *incorreto* afirmar que:

a) o total de filhos dos casais do grupo *B* é maior do que o total de filhos dos casais dos grupos *A* e *C*.
b) pelo menos 40% do total de filhos dos casais dos grupos *A*, *B* e *C* é constituído de meninos.
c) pelo menos a metade do total de filhos dos casais pesquisados é constituída de meninas.
d) mais da metade do total de filhos dos casais dos grupos *A* e *B* é constituída de meninas.

165. (Fuvest-SP) Considere os seguintes dados, obtidos em 1996 pelo censo do IBGE.

1. A distribuição da população por grupos de idade é:

Idade	Número de pessoas
de 4 a 14 anos	37 049 723
de 15 a 17 anos	10 368 618
de 18 a 49 anos	73 644 508
50 anos ou mais	23 110 079

2. As porcentagens de pessoas maiores de 18 anos filiadas ou não a sindicatos, órgãos comunitários e órgãos de classe são:

3. As porcentagens de pessoas maiores de 18 anos filiadas a sindicatos, órgãos comunitários e órgãos de classe são:

A partir dos dados acima, pode-se afirmar que o número de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a órgãos comunitários é, aproximadamente, em milhões:

a) 2 b) 6 c) 12 d) 21 e) 31

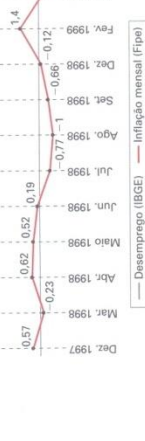
166. (Vunesp-SP) O gráfico ao lado, publicado na *Folha de S. Paulo* de 16/8/2001, mostra os gastos (em bilhões de reais) do governo federal com os juros da dívida pública.

Pela análise do gráfico, pode-se afirmar que:

a) em 1998, o gasto foi de R$ 102,2 bilhões.
b) o menor gasto foi em 1996.
c) em 1997, houve redução de 20% nos gastos, em relação a 1996.
d) a média dos gastos nos anos de 1999 e 2000 foi de R$ 79,8 bilhões.
e) os gastos decresceram de 1997 a 1999.

bilhões de reais: 1995: 19,5; 1996: 23,6; 1997: 20,6; 1998: 54,7; 1999: 102,2; 2000: 57,4; 2001: 70,0 (ano)

(Obs.: 2001 — estimativa até dezembro.)

167. (UF-PE) Qual das afirmações seguintes está de acordo com o gráfico abaixo?

a) Sempre que a inflação diminui, a taxa de desemprego aumenta.
b) Sempre que a inflação aumenta, a taxa de desemprego aumenta.
c) A taxa média mensal de desemprego de setembro a dezembro de 1998 foi inferior a 8%.
d) Quando a taxa de desemprego foi superior a 8% houve deflação.
e) Entre agosto e dezembro de 1998 a taxa de desemprego decresceu linearmente.

168. (Enem-MEC) Em março de 2001, o presidente dos Estados Unidos da América, George W. Bush, causou polêmica ao contestar o pacto de Kyoto, dizendo que o acordo é prejudicial à economia norte-americana em um momento em que o país passa por uma crise de energia (...) O protocolo de Kyoto prevê que os países industrializados reduzam suas emissões de CO_2 até 2012 em 5,2%, em relação aos níveis de 1990.

Adaptado de: *Folha de S.Paulo*, 11/4/2001.

O gráfico mostra o total de CO_2 emitido nos últimos 50 anos por alguns países, juntamente com os valores de emissão máxima de CO_2 por habitante no ano de 1999. Dados populacionais aproximados (nº de habitantes):

— EUA: 240 milhões;
— Brasil: 160 milhões.

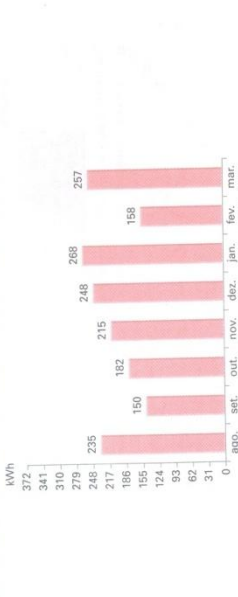
Se o Brasil mantivesse constante a sua população e o seu índice anual máximo de emissão de CO_2, o tempo necessário para o Brasil atingir o acumulado atual dos EUA seria, aproximadamente, igual a:

a) 60 anos.
b) 230 anos.
c) 460 anos.
d) 850 anos.
e) 1 340 anos.

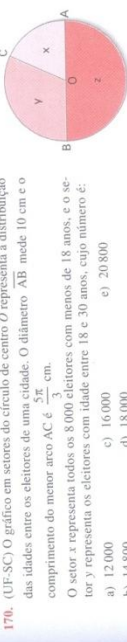
Emissão anual máxima por habitante (tonelada): 36; 7; 2,5

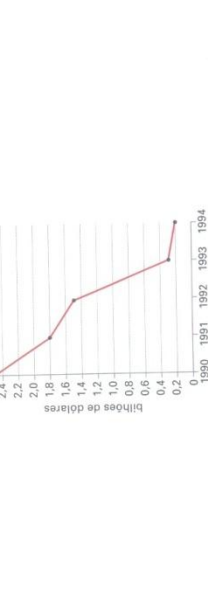
total de emissões de CO_2 desde 1950/bilhões de t — EUA, China, Austrália, Brasil

Adaptado de: *Veja*, 18/4/2001.

169. (UE-RJ, adaptado) Observe o demonstrativo do consumo de energia elétrica:
Para conhecimento, demonstramos a seguir a evolução do consumo de energia elétrica nos últimos meses.

Considere que o consumo médio, de agosto/1998 a dezembro/1998, foi igual ao que ocorreu de janeiro/1999 a abril/1999.
O consumo no mês de abril de 1999, em kWh, foi igual a:

a) 141
b) 151
c) 161
d) 171

170. (UF-SC) O gráfico em setores do círculo de centro *O* representa a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro $\overline{AB}$ mede 10 cm e o comprimento do menor arco AC é $\frac{5\pi}{3}$ cm.
O setor *x* representa todos os 8 000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cujo número é:

a) 12 000
b) 14 800
c) 16 000
d) 18 000
e) 20 800

171. (Puccamp-SP) O gráfico a seguir apresenta os investimentos anuais em transportes, em bilhões de dólares, feitos pelo governo de um certo país, nos anos indicados.

De acordo com esse gráfico, é verdade que o investimento do governo desse país, em transportes:

a) vem crescendo na década de 90.
b) diminui, por ano, uma média de 1 bilhão de dólares.
c) em 1991 e 1992 totalizou 3,8 bilhões de dólares.
d) em 1994 foi o dobro do que foi investido em 1990.
e) em 1994 foi menor que a décima parte do que foi investido em 1990.

172. (UF-SE) Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o Brasil vem reduzindo, nos últimos anos, o índice de mortalidade infantil. Na tabela abaixo tem-se, para a região Nordeste e nos anos indicados, o número de óbitos em crianças de 0 a 1 ano de idade, para cada 1 000 nascidas vivas.

Ano	1950	1970	1991	1998
Taxa de mortalidade infantil	184,33	150,07	68,59	54,47

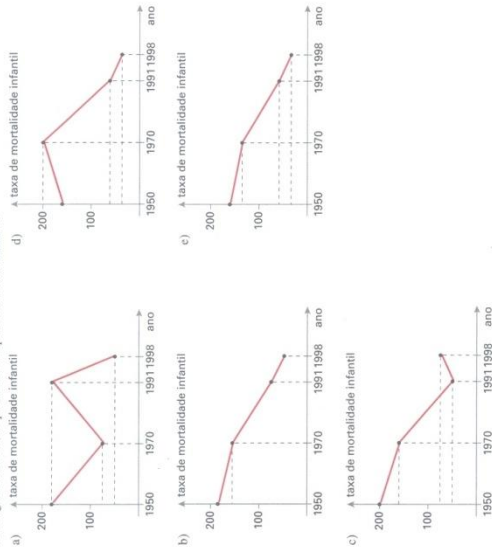
Das figuras abaixo, a que *melhor* representa esses dados é:

a)

b)

c) taxa de mortalidade infantil; 200; 100; 1950; 1970; 1991 1998; ano

d) taxa de mortalidade infantil; 200; 100; 1950; 1970; 1991 1998; ano

e)

173. (PUC-MG) Algumas universidades já estão usando a nota do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) para compor a nota final do vestibular, aplicando a seguinte fórmula: "A nota final do vestibular será igual à nota da prova do vestibular, vezes 4, mais a nota do Enem, vezes 1, sendo o resultado dividido por 5. Mas, se o resultado dessa média for inferior ao da prova do vestibular, fica valendo a nota da prova do vestibular."
Observe atentamente o quadro a seguir:

Candidato	A	B
Nota do vestibular (em %)	60	60
Nota do Enem (em %)	70	50
Nota final do vestibular	▲	▲

As notas finais do vestibular dos candidatos *A* e *B* são, respectivamente:

a) 65 e 55. b) 62 e 60. c) 62 e 58. d) 70 e 58. e) 65 e 60.

174. (Faap-SP) Nas eleições realizadas em 1º turno em todo o país no dia 3 de outubro de 1996, inaugurou-se o voto eletrônico. Numa determinada seção eleitoral, cinco eleitores demoraram para votar, respectivamente: 1min04s, 1min32s, 1min12s, 1min52s e 1min40s.
A média aritmética do tempo de votação (em minutos e segundos) desses eleitores é:

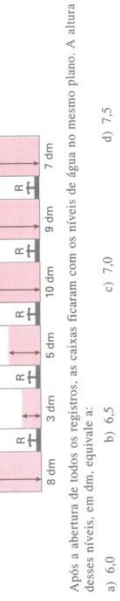
a) 1min28s b) 1min58s c) 1min d) 1min04s e) 2min04s

175. (UF-MG) Define-se a média aritmética de *n* números dados como o resultado da divisão por *n* da soma dos *n* números dados. Sabe-se que 3,6 é a média aritmética de 2,7; 1,4; 5,2 e *x*. O número *x* é igual a:

a) 2,325 b) 3,1 c) 3,6 d) 5,1

176. (UE-RJ) O engenheiro Ronaldo Belassiano descobriu que o carioca é o povo mais ágil para embarcar nos coletivos. Ele leva, em média, apenas 1,85 segundo contra 2,4 segundos gastos, em média, pelos londrinos.
Adaptado de: *Superinteressante*, setembro de 1996.
Com base no texto, considere que um ônibus no Rio de Janeiro fique parado num ponto, durante 74 segundos, e embarquem passageiros de acordo com a média apresentada.
Em Londres, para embarcar essa mesma quantidade de passageiros, o ônibus deverá ficar parado durante:

a) 96 s b) 104 s c) 108 s d) 220 s

177. (UE-RJ) Seis caixas-d'água cilíndricas iguais estão assentadas no mesmo piso plano e ligadas por registros (*R*) situados nas suas bases, como sugere a figura a seguir:

Após a abertura de todos os registros, as caixas ficaram com os níveis de água no mesmo plano. A altura desses níveis, em dm, equivale a:

a) 6,0 b) 6,5 c) 7,0 d) 7,5

178. (FGV-SP) As notas de um candidato em suas provas de um concurso foram: 8,4; 9,1; 7,2; 6,8; 8,7 e 7,2. A nota média, a nota mediana e a nota modal desse aluno são, respectivamente:

a) 7,9; 7,8; 7,2
b) 7,2; 7,8; 7,9
c) 7,8; 7,8; 7,9
d) 7,2; 7,8; 7,9
e) 7,8; 7,9; 7,2

179. (Fund. Carlos Chagas-SP) A média aritmética de 11 números é 45. Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será:

a) 48,7 b) 48 c) 47,5 d) 42 e) 41,5

180. (UF-AL) Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é:

a) 0,3 b) 3,3 c) 5,4 d) 6,6 e) 8

181. (Fuvest-SP) Num determinado país a população feminina representa 51% da população total. Sabendo-se que a idade média (média aritmética das idades) da população feminina é de 38 anos e a da masculina é de 36 anos, qual a idade média da população?

a) 37,02 anos b) 37,00 anos c) 37,20 anos d) 36,60 anos e) 37,05 anos

182. (Puccamp-SP) Sabe-se que os números *x* e *y* fazem parte de um conjunto de 100 números, cuja média aritmética é 9,83. Retirando-se *x* e *y* desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será 8,5. Se $3x - 2y = 125$, então:

a) $x = 75$ b) $y = 55$ c) $x = 80$ d) $y = 65$ e) $x = 95$

183. (UF-CE) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 6,5 b) 7,2 c) 7,4 d) 7,8 e) 8,0

184. (UFF-RJ) Para que a média aritmética das notas de uma turma de 20 alunos aumentasse em 0,1, alterou-se uma dessas notas para 7,5. Antes da alteração, tal nota era:

a) 5,5 b) 6,0 c) 7,4 d) 7,6 e) 8,5

185. (PUC-RJ) Um aluno faz 3 provas com pesos 2, 2 e 3. Se ele tirou 2 e 7 nas duas primeiras, quanto precisa tirar na terceira prova para ficar com média maior ou igual a 6?

a) Pelo menos 4.
b) Pelo menos 5.
c) Pelo menos 6.
d) Pelo menos 7.
e) Pelo menos 8.

186. (PUC-SP) A média aritmética de 100 números é igual a 40,19. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos 99 números restantes passará a ser 40,5. O número retirado equivale a:

a) 9,5% b) 75% c) 95% d) 765% e) 950%

187. (UF-RN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20.
A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:

a) 5,65 b) 5,70 c) 5,75 d) 5,80

188. (FGV-SP, adaptado) Em um conjunto de 100 observações numéricas distintas, podemos afirmar que:

a) a média aritmética é maior que a mediana.
b) a mediana é maior que a moda.
c) 50% dos valores estão acima da média aritmética.
d) 50% dos valores estão abaixo da mediana.
e) 25% dos valores estão entre a moda e a mediana.

189. (ESPM-SP) Considere todos os pares ordenados (x, y) do produto cartesiano A × B em que A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5}. Tomando-se todos os 12 produtos x · y, podemos afirmar que a média, a moda e a mediana desse conjunto são, respectivamente:

a) 9,5; 7,5 e 5,5.
b) 7,5; 5,5 e 3,0.
c) 7,5; 3,0 e 5,5.
d) 5,5; 5,5 e 5,5.
e) 7,5; 3,0 e 6,0.

190. (PUC-PR) Em um grupo de pessoas, 70% não possuem curso superior e 30% possuem. O salário dos que não possuem curso superior é R$ 500,00 e o salário dos que possuem é R$ 1 500,00.
O salário médio do grupo é de:

a) R$ 800,00
b) R$ 866,00
c) R$ 900,00
d) R$ 1 000,00
e) R$ 1 200,00

191. (Vunesp-SP) Num concurso vestibular para dois cursos, *A* e *B*, compareceram 500 candidatos para o curso *A* e 100 candidatos para o curso *B*. Na prova de Matemática, a média aritmética geral, considerando os dois cursos, foi 4,0. Mas considerando-se apenas os candidatos ao curso *A*, a média cai para 3,8. A média dos candidatos ao curso *B*, na prova de Matemática, foi:

a) 4,2 b) 5,0 c) 5,2 d) 6,0 e) 6,2

192. (Fuvest-SP) Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:

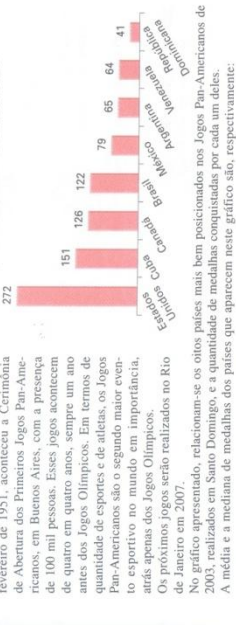
a) 16 b) 20 c) 50 d) 70 e) 100

193. (ESPM-SP) Na viagem de ida para o litoral, o Sr. João notou que a velocidade média foi de 90 km/h e na viagem de volta foi de 45 km/h. Considerando, então, a ida e a volta, a velocidade média da viagem foi de:

a) 67,5 km/h b) 65,0 km/h c) 63,4 km/h d) 61,5 km/h e) 60,0 km/h

194. (U. E. Londrina-PR) Um automóvel subiu uma ladeira a uma velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h. A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de:

a) 72 km/h b) 75 km/h c) 78 km/h d) 80 km/h e) 84 km/h

195. (Umesp-SP) Com o objetivo de promover os esportes amadores na América, no dia 25 de fevereiro de 1951, aconteceu a Cerimônia de Abertura dos Primeiros Jogos Pan-Americanos, em Buenos Aires, com a presença de 100 mil pessoas. Esses jogos acontecem de quatro em quatro anos, sempre um ano antes dos Jogos Olímpicos. Em termos de quantidade de esportes e de atletas, os Jogos Pan-Americanos são o segundo maior evento esportivo no mundo em importância, atrás apenas dos Jogos Olímpicos.
Os próximos jogos serão realizados no Rio de Janeiro em 2007.

Total de medalhas conquistadas pelos oito países mais bem posicionados em Santo Domingo (2003)

No gráfico apresentado, relacionam-se os oitos países mais bem posicionados nos Jogos Pan-Americanos de 2003, realizados em Santo Domingo, e a quantidade de medalhas conquistadas por cada um deles.
A média e a mediana de medalhas dos países que aparecem neste gráfico são, respectivamente:

a) 115 e 100,5
b) 105 e 100
c) 110 e 105
d) 460 e 100
e) 460 e 100,5

196. (U. F. Juiz de Fora-MG) No início de um jogo de voleibol, a média aritmética das alturas dos 6 atletas de uma equipe era igual a 1,95 m. Em certo momento, foram feitas duas substituições, saindo dois atletas de alturas 1,89 m e 1,95 m e entrando dois atletas de alturas 1,99 m e 2,03 m. A média aritmética das alturas dos 6 atletas dessa equipe ficou igual a:

a) 1,94 m
b) 1,95 m
c) 1,96 m
d) 1,97 m
e) 1,98 m

197. (UF-MG) No início de uma partida de futebol, a altura média dos 11 jogadores de um dos times era 1,72 m. Ainda no primeiro tempo, um desses jogadores, com 1,77 m de altura, foi substituído. Em seu lugar, entrou outro que media 1,68 m de altura.
No segundo tempo, outro jogador do mesmo time, com 1,73 m de altura, foi expulso.
Ao terminar a partida, a altura média dos 10 jogadores desse time era:

a) 1,69 m
b) 1,70 m
c) 1,71 m
d) 1,72 m

198. (FGV-SP) Um investidor aplicou seu patrimônio em 5 ações por 1 ano. A taxa média de rentabilidade (média aritmética) foi de 12% ao ano. A ação mais lucrativa rendeu 25% ao ano. Se essa ação for eliminada, a taxa média de rentabilidade das 4 restantes será igual a:

a) 8,75% ao ano
b) 9% ao ano
c) 9,25% ao ano
d) 9,5% ao ano
e) 9,75% ao ano

199. (UF-MG) A média das notas na prova de Matemática de uma turma com 30 alunos foi de 70 pontos. Nenhum dos alunos obteve nota inferior a 60 pontos.
O número máximo de alunos que podem ter obtido nota igual a 90 pontos é:

a) 16
b) 13
c) 23
d) 10

200. (U. F. Uberlândia-MG) O Departamento de Comércio Exterior do Banco Central possui 30 funcionários com a distribuição salarial em reais mostrada na tabela ao lado.
Quantos funcionários que recebem R$ 3 600,00 devem ser demitidos para que a mediana desta distribuição de salários seja de R$ 2 800,00?

Nº de funcionários	Salário (em R$)
10	2 000,00
12	3 600,00
5	4 000,00
3	6 000,00

a) 8
b) 11
c) 9
d) 10
e) 7

201. (Efei-MG) Numa empresa com 20 funcionários, a distribuição dos salários está representada no quadro abaixo:

Número de empregados	Salário (em reais)
10	1 540
5	1 860
3	2 120
2	3 440

O salário médio (em reais) dos empregados dessa empresa é:

a) 1 680 b) 1 742 c) 1 786 d) 1 831 e) 1 897

202. (U. F. Lavras-MG) O quadro abaixo representa a distribuição de freqüência do número de ovos estragados por caixa em uma granja.

Número de ovos estragados por caixa	Porcentagem de caixas
0	63
1	27
2	7
3	3
> 3	0

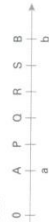
O número médio de ovos estragados por caixa é:

a) 0,5 b) 0,3 c) 0,4 d) 0,6 e) 0,7

203. (FEI-SP) Foram inspecionados dois lotes de peças. A média dos diâmetros das peças do primeiro lote é 4,3 cm. A média dos diâmetros do segundo é 3,5 cm. Juntando-se os dois lotes a média é 4,0 cm. Quantas peças há no total, se o primeiro lote possui 4 peças a mais do que o segundo?

a) 10 b) 11 c) 14 d) 15 e) 16

204. (UF-MG) Observe a reta numérica.

0 A P Q R S B
a b

Nessa reta, o segmento AB está dividido em cinco partes iguais. As coordenadas de A e B são a e b, respectivamente. Define-se a média ponderada dos números a e b com pesos m e n, respectivamente, por $\frac{(ma + nb)}{(m + n)}$.

Para localizar o ponto da reta numérica cuja coordenada é $\frac{(ma + nb)}{(m + n)}$, pode-se usar a equivalência $\frac{(ma + nb)}{(m + n)} = a + \left[\left(\frac{n}{m + n}\right)(b - a)\right]$.

O ponto da reta numérica de coordenada $\frac{(2a + 3b)}{5}$ é:

a) R b) Q c) S d) P

205. (U. F. Uberlândia-MG) Em uma classe de 40 alunos as notas obtidas em um teste formaram a seguinte distribuição:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de alunos	4	4	8	1	2	7	7	5	1	1

Nesse caso, a nota mediana é:

a) 3 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

206. (UMC-SP) Um grupo de 10 pesquisadores teve dois de seus integrantes substituídos. A soma de suas idades era 112 anos. Com a chegada dos substitutos, a idade média do grupo diminuiu em 5 anos. Sabendo-se que um dos novos pesquisadores tem 30 anos, a idade do outro deve ser:

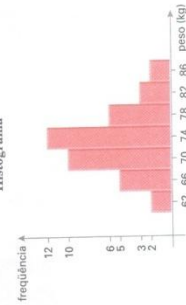
a) 25 anos b) 32 anos c) 30 anos d) 45 anos e) 46 anos

207. (U. F. Uberlândia-MG) Uma equipe de futebol realizou um levantamento dos pesos dos seus 40 atletas e chegou à distribuição de freqüência dada pela tabela a seguir, cujo histograma correspondente é visto abaixo.

Tabela

Peso kg	Freqüência
60 ⊢ 64	2
64 ⊢ 68	5
68 ⊢ 72	10
72 ⊢ 76	12
76 ⊢ 80	6
80 ⊢ 84	3
84 ⊢ 88	2
Total de atletas	**40**

Histograma

freqüência
12 10 6 5 3 2
62 66 70 74 78 82 86 peso (kg)

Com base nesses dados, pode-se afirmar que o valor da mediana dos pesos é igual a:

a) 75 b) 72 c) 74 d) 73

208. (Fuvest-SP) Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a tabela ao lado. Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para este grupo, está entre:

Nº de infrações	Nº de motoristas
de 1 a 3	7
de 4 a 6	10
de 7 a 9	15
de 10 a 12	13
de 13 a 15	5
maior ou igual a 16	0

a) 6,9 e 9,0
b) 7,2 e 9,3
c) 7,5 e 9,6
d) 7,8 e 9,9
e) 8,1 e 10,2

209. (Puccamp-SP) Em um treinamento de salto em distância um atleta conseguiu, em seus três saltos, os seguintes resultados:

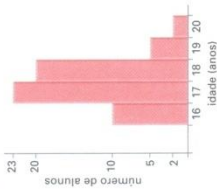
Salto	Média aritmética dos alcances (em metros)
1º e 2º	6,0
1º e 3º	5,95
2º e 3º	5,75

Dentre os três saltos, o maior alcance foi:

a) 6,3 m b) 6,2 m c) 6,0 m d) 5,8 m e) 5,7 m

210. (FGV-SP, adaptado) Uma cesta básica de produtos contém 2 kg de arroz, 1 kg de feijão e 3 kg de farinha. No período de 1 ano, o preço do quilograma de arroz subiu 10%, o do feijão subiu 36%, e o da farinha aumentou 15%. O aumento percentual do preço da cesta básica, no período, foi de aproximadamente:
Observação: Inicialmente admita o mesmo preço para os três produtos.

a) 20,4% b) 19,5% c) 18,6% d) 17,7% e) 16,8%

211. (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo gráfico adiante:

Qual das alternativas representa melhor a média das idades dos alunos?

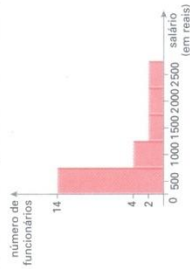
a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos e 1 mês
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

212. (Fuvest-SP) Uma prova continha cinco questões, cada uma valendo 2 pontos. Em sua correção, foram atribuídas a cada questão apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse, respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada aluno. Ao final da correção, produziu-se a seguinte tabela contendo a porcentagem de acertos em cada questão.

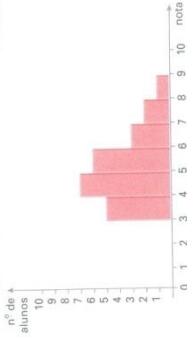
Questão	1	2	3	4	5
Porcentagem de acerto (%)	30	10	60	80	40

Logo, a média das notas da prova foi:

a) 3,8
b) 4,0
c) 4,2
d) 4,4
e) 4,6

213. (PUC-SP) O histograma a seguir apresenta a distribuição de freqüência das faixas salariais numa pequena empresa.
Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente:

Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente:

a) R$ 420,00
b) R$ 536,00
c) R$ 562,00
d) R$ 640,00
e) R$ 708,00

214. (Unopar-PR) Um professor, para analisar o desempenho de seus alunos, construiu o seguinte gráfico:

Para construir esse gráfico, o professor agrupou as notas obtidas da seguinte forma: a primeira coluna indica a quantidade de alunos que tiraram notas entre 3 e 4, incluindo os que tiveram nota 3 mas não os que tiveram nota 4; a segunda coluna, por sua vez, indica a quantidade de alunos que tiraram entre 4 e 5, incluindo os que tiraram 4 mas não a nota 5, e assim por diante.
Analisando-se esse gráfico, pode-se concluir que:

a) um dos alunos obteve nota maior que 9.
b) a maior nota da classe foi 7.
c) a nota média da classe está entre 8 e 9.
d) 50% da classe tirou nota menor que 5.
e) ao todo, 8 alunos tiraram nota menor que 5.

215. (FGV-SP) A tabela a seguir representa a distribuição de freqüências dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, num certo mês.

Número de classe	Salário do mês em reais	Número de empregados
1	1 000 ⊢ 2 000	20
2	2 000 ⊢ 3 000	18
3	3 000 ⊢ 4 000	9
4	4 000 ⊢ 5 000	3

O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de:

a) R$ 2 637,00
b) R$ 2 520,00
c) R$ 2 500,00
d) R$ 2 420,00
e) R$ 2 400,00

Respostas dos testes

1. e
2. d
3. a
4. b
5. d
6. a
7. b
8. a
9. c
10. b
11. e
12. a
13. b
14. a
15. b
16. d
17. b
18. e
19. c
20. b
21. d
22. d
23. b
24. b
25. e
26. b
27. d
28. e
29. b
30. b
31. b
32. c
33. c
34. e
35. c
36. a
37. b
38. a
39. b
40. d
41. b
42. d
43. a
44. a
45. e
46. d
47. c
48. a
49. e
50. a
51. d
52. c
53. d
54. a
55. e
56. d
57. b
58. b
59. a
60. b
61. b
62. c
63. a
64. d
65. d
66. c
67. d
68. d
69. c
70. d
71. e
72. d
73. e
74. b
75. b
76. c
77. b
78. e
79. c
80. d
81. a
82. b
83. d
84. c
85. c
86. a
87. c
88. e
89. d
90. e
91. c
92. c
93. c
94. d
95. d
96. b
97. c
98. b
99. d
100. b
101. e
102. c
103. c
104. b
105. e
106. b
107. c
108. b
109. c
110. e
111. c
112. a
113. c
114. c
115. b
116. a
117. c
118. e
119. a
120. a
121. b
122. e
123. a
124. b
125. c
126. c
127. b
128. d
129. a
130. e
131. a
132. b
133. a
134. d
135. b
136. d
137. a
138. d
139. e
140. b
141. e
142. a
143. b
144. e
145. d
146. e
147. d
148. b
149. c
150. c
151. a
152. d
153. b
154. b
155. d
156. a
157. d
158. c
159. a
160. a

161. d
162. d
163. d
164. c
165. c
166. d
167. c
168. c
169. a
170. c
171. e
172. b
173. b
174. a
175. d
176. a
177. c
178. a
179. a
180. d
181. a
182. d
183. b
184. a
185. e
186. e
187. a
188. d
189. e
190. a
191. b
192. d
193. e
194. b
195. a
196. e
197. c
198. a
199. d
200. d
201. e
202. a
203. e
204. a
205. d
206. b
207. d
208. a
209. b
210. e
211. c
212. d
213. e
214. d
215. e

Significado das siglas de vestibulares

Acafe-SC — Associação Catarinense das Fundações Educacionais, Santa Catarina
AFA-SP — Academia da Força Aérea, São Paulo
Aman-RJ — Academia Militar de Agulhas Negras, Rio de Janeiro
Cefet-PR — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesesp-PE — Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco
Cesgranrio-RJ — Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio, Rio de Janeiro
Cesubra-DF — Centro de Ensino Superior Unificado de Brasília, Distrito Federal
Cesupa-PA — Centro Universitário do Pará
Covest-PE — Comissão de Vestibulares de Pernambuco
ECM-AL — Escola de Ciências da Saúde de Alagoas
EEM-SP — Escola de Engenharia Mauá, São Paulo
Efei-MG — Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais
Efoa-MG — Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas, Minas Gerais
E. Naval-RJ — Escola Naval do Rio de Janeiro
Enem-MEC — Exame Nacional do Ensino Médio
Esal-MG — Escola Superior de Agricultura de Lavras, Minas Gerais
Esccai-MG — Escola Superior de Ciências Contábeis e Administrativas de Ituiutaba, Minas Gerais
Escola Técnica Federal-RJ — Escola Técnica Federal do Rio de Janeiro
EsPCEx-SP — Escola Preparatória de Cadetes do Exército, São Paulo
ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing, São Paulo
Faap-SP — Fundação Armando Álvares Penteado, São Paulo
Fatec-SP — Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCM-MG — Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
FCMSC-SP — Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
F. E. Edson Queiroz-CE — Fundação Educacional Edson Queiroz, Ceará
FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial, São Paulo
Fesp-SP — Faculdade de Engenharia de São Paulo
FGV-SP — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo
FISFS-SP — Faculdades Integradas de Santa Fé do Sul, São Paulo
F. Luiz Meneghel-PR — Faculdades Luiz Meneghel, Paraná
F. M. ABC-SP — Faculdade de Medicina do ABC, São Paulo
F. M. Bragança-SP — Faculdade de Medicina de Bragança, São Paulo
F. M. Itajubá-MG — Faculdade de Medicina de Itajubá, Minas Gerais
F. M. Jundiaí-SP — Faculdade de Medicina de Jundiaí, São Paulo
F. M. Pouso Alegre-MG — Faculdade de Medicina de Pouso Alegre, Minas Gerais
F. M. Triângulo Mineiro-MG — Faculdade de Medicina do Triângulo Mineiro, Minas Gerais
F. M. Vassouras-RJ — Faculdade de Medicina de Vassouras, Rio de Janeiro
Fund. Carlos Chagas-SP — Fundação Carlos Chagas, São Paulo
Furg-RS — Fundação Universidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul
Fuvest-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo
IME-RJ — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
IMES-SP — Centro Universitário Municipal de São Caetano do Sul, São Paulo
Inatel-MG — Instituto Nacional de Telecomunicações, Minas Gerais
ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo
Mackenzie-SP — Universidade Mackenzie de São Paulo

Omec-SP — Organização Mogiana de Educação e Cultura, São Paulo
PUC-BA — Pontifícia Universidade Católica da Bahia
Puccamp-SP — Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo
PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
U. Caxias do Sul-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
U. C. Brasília-DF — Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal
UCDB-MS — Universidade Católica Dom Bosco, Mato Grosso do Sul
UC-GO — Universidade Católica de Goiás
UC-MG — Universidade Católica de Minas Gerais
Ucsal-BA — Universidade Católica de Salvador, Bahia
UCS-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
UE-CE — Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA — Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia
U. E. Londrina-PR — Universidade Estadual de Londrina, Paraná
UE-MA — Universidade Estadual do Maranhão
U. E. Maringá-PR — Universidade Estadual de Maringá, Paraná
UE-MG — Universidade Estadual de Minas Gerais
UE-PA — Universidade do Estado do Pará
UE-PB — Universidade Estadual da Paraíba
UE-PI — Universidade Estadual do Piauí
UE-RJ — Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uesb-BA — Universidade Estadual do Sudoeste Baiano, Bahia
UF-AC — Universidade Federal do Acre
UF-AL — Universidade Federal de Alagoas
UF-AM — Universidade Federal do Amazonas
UF-BA — Universidade Federal da Bahia
UF-CE — Universidade Federal do Ceará
UF-ES — Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro
UF-GO — Universidade Federal de Goiás
U. F. Juiz de Fora-MG — Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais
U. F. Lavras-MG — Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais
UF-MA — Universidade Federal do Maranhão
UF-MG — Universidade Federal de Minas Gerais
UF-MT — Universidade Federal do Mato Grosso
U. F. Ouro Preto-MG — Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais
UF-PA — Universidade Federal do Pará
UF-PB — Universidade Federal da Paraíba
UF-PE — Universidade Federal de Pernambuco
U. F. Pelotas-RS — Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul
UF-PI — Universidade Federal do Piauí
UF-PR — Universidade Federal do Paraná
UFRA-PA — Universidade Federal Rural da Amazônia, Pará